И ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ АНТРОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТАНДАРТИЗАЦИИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО
К МАССОВОМУ ПРОИЗВОДСТВУ ИЗДЕЛИЙ ЛИЧНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1951

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
21	Подпись под рис. 3	Номограмма	Номограмма 1
39	1 снизу	2,153	1,253
47	9 „	$\frac{5,2}{60}$	$\frac{5,2}{6,0}$
49	Табл. 12 графа 1, строка 1 снизу		y
	графа 7 „ 1 „	4	86,4
52	15 снизу	$e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$
58	10 „	и	и строк
59	11 сверху	$P\alpha_x{}^{\alpha}$	$P\alpha_x{}^{\alpha_y}$
63	1 снизу	$z\Delta'_1, \Delta_2, \ldots \Delta'_n$	$z\Delta'_1\ \Delta'_2 \ldots \Delta'_n$
65	28 „	найти R	найти R_{22}
78	7 „	$\nu_{20}\ \nu^2_{10}$	$\nu_{20}\ \nu^2_{01}$
100	Подпись под рис. 3	δ	σ
115	24 снизу	Δ	Δ_2
120	2 подстрочное примечание	$1-r)$	$(1-r)$
122	9 снизу	k^2_4	k_4
130	2 „	$x' - x'$	$x' - x''$
141	Рис. 10, над левой шкалой		r

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ АНТРОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТАНДАРТИЗАЦИИ

ПРИМЕНИТЕЛЬНО К МАССОВОМУ ПРОИЗВОДСТВУ ИЗДЕЛИЙ ЛИЧНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1951

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета
Московского университета

Ответственный редактор проф. М. А. ГРЕМЯЦКИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из особенностей советского периода развития антропологической науки является все растущее привлечение ее к решению задач, выдвигаемых социалистическим народным хозяйством. Среди них большое место занимают вопросы, связанные со стандартизацией антропологических признаков, используемых в целях рационального построения образцов и размеров изделий, которые предназначены для личного пользования (т. е. предметов одежды, обуви, головных уборов и т. д.), а также служат для установления ассортимента этих изделий. Круг вопросов, разрабатываемых в этом народнохозяйственном направлении, объединяется под общим названием теории и методов антропологической стандартизации.

Задачи антропологической стандартизации часто отличаются большой сложностью, требуя особых приемов собирания и обработки материала. Это вызвало появление в нашей стране целого ряда больших специальных исследований. Их осуществление оказалось возможным вследствие высокого уровня, которого достигли в Советском Союзе антропологическая наука и смежные с нею отрасли знания.

Трудами советских ученых последних лет накоплен обширный конкретный материал об антропологическом составе населения нашей страны, установлены имеющие важное практическое значение особенности антропологического материала: близкая к нормальной форма распределения измерительных признаков и их сочетаний, устойчивость объема их изменчивости и степени связи между ними, проявляющаяся при рассмотрении национальных и территориальных групп; далее, выяснены основные закономерности роста организма человека в различных условиях его существования, изучены и количественно выражены проявления полового диморфизма.

Развитие биометрии применительно к задачам антропологии дало возможность преодолевать трудности вычислительного порядка, без чего некоторые исследования практически были бы невыполнимы; найдены удобные способы вычисления ожидаемых частот сочетаний двух случайных переменных (признаков), разработано применение номографии, последовательно рационализирована вычислительная техника.

В свою очередь, работы по стандартизации обогатили советскую антропологию новыми обширными материалами, способствовали усовершенствованию приемов антропометрических наблюдений и привели к постановке специальных теоретических вопросов: о выборе основных размеров, характеризующих отдельные части человеческого тела, об оптимальном числе таких размеров, о наиболее благоприятном числе стандартов, о связи основных размеров со всеми прочими дополнительными, о наилучшем определении потребного ассортимента, о степени точности получаемых результатов и доле влияния отдельных факторов на общую величину погрешности и т. д.

Настоящее издание представляет собою опыт подведения некоторых итогов и обобщения результатов работ по антропологической стандартизации, проводимых в течение последних лет в Советском Союзе. Многие из положений публикуются здесь впервые [1].

В составлении настоящего труда приняли участие сотрудники Института антропологии МГУ. Из них П. И. Зенкевич дает общий обзор задач антропологической стандартизации, П. Н. Башкиров излагает опыты практического применения антропологии в разных отраслях народного хозяйства. Работы М. В. Игнатьева содержат изложение статистических приемов, применяемых при антропологической стандартизации, и рассмотрение теоретической стороны построения стандартов. Статьи А. В. Пугачевой и Е. И. Фортунатовой посвящены специальным вопросам биометрического порядка.

Ряд разделов антропологической стандартизации нуждается в дальнейшей разработке (например, проблема так называемых интервалов безразличия), но поскольку потребность в такого рода обобщениях в настоящее время вполне назрела, о чем свидетельствуют все растущие запросы к антропологии со стороны производственных организаций, выпуск настоящей сводной работы представляется своевременным.

Следует отметить, что особенность работ в направлении антропологической стандартизации выражается в комплексном характере. Успешное их развитие возможно при участии представителей различных областей науки: биологии (антропологии, физиологии), медицины, гигиены, технологии в различных ее направлениях, математики (математической статистики, номографии).

Поэтому настоящее издание, стремясь удовлетворить требованиям практики, преследует в то же время цель привлечения внимания широких кругов научной общественности к теоретическим вопросам, составляющим содержание учения об антропологической стандартизации.

---

[1] Так как в основном издание имеет в виду интересы практических приложений антропологии, то оно снабжено достаточным числом примеров, иллюстраций и технических указаний. В связи с этим, ввиду ограниченности объема книги, пришлось пожертвовать подробностями выводов и опустить статистический материал, относящийся к распределению антропологических признаков в населении и положенный в основание излагаемых расчетов.

П. И. ЗЕНКЕВИЧ

ЗАДАЧИ СТАНДАРТИЗАЦИИ РАЗМЕРОВ ИЗДЕЛИЙ ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ НА ОСНОВЕ АНТРОПОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ

С быстрым ростом в нашей стране социалистической промышленности, в частности легкой промышленности, пришедшей на смену мелкому кустарному производству и почти полностью заменившей его, в корне изменились условия изготовления и распределения среди населения всевозможных предметов индивидуального пользования, как-то: одежды, обуви, трикотажных изделий, перчаток и прочее. В дореволюционное время основными производителями этих предметов были кустари и небольшое число мелких частных предприятий, обслуживавших своей продукцией очень ограниченный круг постоянных потребителей данного населенного района. В этих условиях имело место обязательное предварительное ознакомление мастера с особенностями строения тела заказчика, путем снятия индивидуальной мерки, по которой конструировалось изделие и подгонялось в процессе последующих примерок. В таких условиях мастер постепенно прекрасно изучал своих заказчиков, удачно справлялся со стоявшей перед ним задачей и вырабатывал свои собственные приемы снятия мерки, конструирования изделий и способы корректирующих пригонок.

В настоящее же время при развитии крупных промышленных предприятий условия производства становятся другими. Производство изделий принимает массовый характер, и продукция той или иной крупной фабрики предназначается для распространения среди населения огромных территорий, часто весьма удаленных от фабрики. В связи с этим непосредственное предварительное индивидуальное обследование особенностей строения тела потребителей делается невозможным. Кроме того, с начала социалистической революции состав населения отдельных районов и его потребности начали также сильно меняться. Возникли новые города и промышленные населенные пункты в районах, ранее бывших земледельческими, или даже в районах, до того времени еще мало освоенных. Сельское население многих районов, прежде удовлетворявшееся, например, одеждой и обувью домашнего производства, стало предъявлять массовые требования на одежду и обувь городского типа и промышленного производства.

При отсутствии возможности, при массовом производстве, непосредственного обследования потребителя, предметы индивидуального пользования должны конструироваться на основе теоретических соображений. Все нужные расчеты должны максимально отвечать размерам соответствующих частей тела, с тем чтобы эти расчеты могли быть воспроизведены в тех или иных закройных лекалах, колодках или манекенах. Перед промышленностью возникают труднейшие задачи: с одной стороны, стандартизовать конструкции изделий, т. е. найти правильные соотношения размеров отдельных частей изделия, другими словами, установить типологию, и, с другой стороны, правильно рассчитать процентное распределение среди снабжаемого населения тех или других размеров изделий.

Для построения размерно-ростовочных стандартов предметов индивидуального пользования, массами производящихся на крупных предприятиях, абсолютно нельзя ограничиться до сих пор часто применяющимся на практике методом, основанным на большом индивидуальном опыте конструктора того или иного вида изделия, — опыте, полученном в эпоху мелкого кустарного производства, хотя бы такой конструктор и являлся большим специалистом в воспроизведении изделия по методам индивидуальной пошивки. Как бы ни был велик опыт такого конструктора, он не может служить сколько-нибудь надежной базой для создания размерного стандарта для массового производства изделий, поскольку этот конструктор в своей практике имел дело только с ограниченным кругом заказчиков, а не с массой населения Союза, и не располагает необходимыми данными о средних величинах размеров и их территориальной изменчивости. Так же неосновательны попытки класть в основу стандартизации размеров конструкции, якобы существующие в природе постоянные соотношения между отдельными размерами частей человеческого тела, иначе говоря, каноны, о которых подробно говорится в статье П. Н. Башкирова. На самом же деле такого постоянства соотношений размеров в природе не существует. Если каноны без ущерба для дела используются в изобразительном искусстве при воссоздании стиля человеческой фигуры, то они не выдерживают никакой научной критики в попытках при помощи их охарактеризовать морфологические особенности населения какой-либо географической области.

Только привлечение обширных систематически подобранных данных о размерах человеческого тела и его частей, т. е. антропологических данных и данных о связях между этими размерами, изученных в возрастном, половом и территориальном разрезе, может дать, как это будет показано ниже, прочную научную базу для построения размерных стандартов. Безусловным правилом конкретного изучения территориальных, возрастных и половых вариаций размеров тела человека является применение разработанной, однообразной измерительной методики. В целях размерной стандартизации можно применить два принципа измерений: или исследовать все размеры, применяемые при раскрое того или другого рода изделий, или использовать обычно применяемый в антропологии способ получения дуговых или линейных размеров между строго установленными анатомическими точками, лежащими во взаимноперпендикулярных плоскостях. Обширный опыт в разработке размерных стандартов показал, что наиболее рациональным является разумное сочетание результатов применения обоих способов. Дело в том, что измерение размеров по принципу производственной техники неизбежно более субъективно, так как большинство их, особенно в отношении швейных изделий, не базируется на строго анатомических точках. Естественно, что при большом субъективизме в технике измерения измерительные признаки, взятые этим способом, в результате окажутся более изменчивыми, а как следствие этого, и степень связи между ними будет изменена. Правда, производственные размеры более удобны при воспроизведении в дальнейшем манекенов, как более характеризующие внешнюю форму частей тела. Измерения, полученные по обычно применяемому в антропологии способу, более точны, поскольку они базируются на строго анатомических точках. Поэтому они менее изменчивы и обнаруживают между собой более реальную степень связи. Но в то же время они менее удобны при воспроизведении манекенов и требуют при переводе их в производственные размеры, необходимые для конструирования шаблонов, введения специальных поправок. Для таких поправок необходимо дополнительное определение меры переходов от аналогичных антропологических размеров к производственным. С другой стороны, применение обычной антропологической техники измерений в работах по стандартизации обеспечивает широкое использование, особенно при расчетах ростовочного ассортимента изделий, многочисленных данных, опубликованных в антропологической литературе.

Но успех построения размерных стандартов зависит не только от конкретного измерительного материала. В еще большей степени он зависит от правильно выбранного метода определения сочетаний размерных признаков.

С момента возникновения в нашей стране крупных производственных предприятий, изготовляющих предметы индивидуального пользования, промышленность прежде всего озаботилась разработкой стандартов и созданием размерных шаблонов. Хотя размерные шаблоны строились в общем в разных размерах, но на практике они далеко не соответствовали своему назначению. Дело в том, что шаблоны хотя и строились различными по абсолютной величине, но, по установившейся в производстве традиции, соотношения размеров их деталей оставались постоянными. Более того, нередки случаи, когда некоторые отрасли промышленности, создавая шаблоны для детских групп населения, допускали простое пропорциональное уменьшение шаблонов, предназначенных для взрослых. На самом же деле в соотношении размеров тела взрослых и детей имеют место совершенно различные закономерности.

Такой принцип построения шаблонов в значительной степени отражает на себе увлечение канонами и исходит из необоснованного и неверного предположения о будто бы имеющемся постоянстве соотношений в изменчивости измерительных признаков частей тела у человека. В действительности же размерные признаки в подавляющем большинстве случаев, наоборот, имеют непостоянное соотношение и, как показали многочисленные исследования на живом человеке, а также на частях скелета, каждому значению одного признака соответствует несколько значений другого, и среднее значение их изменяется отнюдь не пропорционально. При этом различия между значениями последнего признака, соответствующие первому признаку, достигают относительно крупных абсолютных величин. Это обстоятельство, не учитывавшееся в первоначальных работах по созданию обобщенных стандартов и тогда еще неосознанное работниками промышленности, создавало весьма большие трудности. В свое время даже возникало сомнение в возможности организовать рентабельное массовое производство предметов личного пользования, предназначаемых для снабжения населения обширных территорий Союза.

Отсутствие полного постоянства соотношения в изменчивости измерительных признаков тела человека было замечено еще старыми авторами, делавшими попытки стандартизировать, например, размеры обувной колодки. В конце прошлого столетия врачи Яковлев (1887)[1] и Приклонский (1890)[2], работавшие над построением системы размеров для рациональной армейской обувной колодки, в своих попытках выделения типов стопы разбивали полученные ими измерительные данные по длине стопы на классы с интервалом в 1 *см* и внутри этих классов на 5—6 подклассов, по величине обхвата через подъем стопы, вычисляя средние арифметические величины внутри класса (по длине стопы) как для второго основного признака (обхвата через подъем), так и для всех дополнительных.

Позднее, в работах Военно-санитарного института РККА (1929—1930)[3], посвященных тому же вопросу и применивших более сложные исчисления, определяющие степень взаимосвязи между признаками, было отмечено, что измерительные признаки стопы изменяются далеко не в постоянном соотношении и что частота случаев каждого дополнительного признака располагается внутри класса основного признака (длина стопы) по принципу, близкому к распределению, известному под названием нормального. Эти работы, установившие две важнейшие для вопроса размерной стандартизации закономерности, к сожалению, не имели практического приложения по причине неразработанности в тот период методов применения статистических знаний к прикладным задачам.

Особенности изменчивости измерительных признаков тела человека отмечались в прикладных и теоретических работах харьковских антропологов (1931—1934)[4], изучавших вариации размеров стопы и вариации контуров тела. Впрочем, характер изменчивости отдельных измерительных признаков был известен в антропологической литературе до упомянутых здесь работ. Но все же до тридцатых годов не было уделено этому вопросу углубленного внимания и систематически не исследовались закономерности изменчивости не отдельных, а массы измерительных признаков, и тем менее изучалась взаимосвязь между ними. В то же время характер изменчивости и характер взаимосвязи между измерительными признаками имеет первенствующее значение в разработке вопроса размерной стандартизации изделий массового производства и распределения.

Несмотря на имевшиеся к тому времени в литературе, хотя и отрывочные, сведения о свойствах изменчивости размерных признаков, в промышленности продолжал господствовать противоположный взгляд, и стандартные колодки и шаблоны продолжали строиться на принципе постоянства соотношения размеров признаков, т. е. на принципе канонов, излюбленном многими конструкторами, воспитанными на изготовлении изделий по индивидуальным заказам.

---

[1] Яковлев И. К вопросу об обуви. Диссертация. СПБ. 1887.

[2] Приклонский И. К вопросу об основах рационального устройства обуви. Диссертация. М. 1890.

[3] Петров М. О типах стопы и колодок.",,Вестн. кож.-обув. пром.", № 2—3, 1929.

Его же. Антропометрические исследования нормальной стопы применительно к стандартной постройке рациональной обуви. „Антроп. журн.", вып. 3—4, 1930.

[4] Недригайлова О. Развитие стопы в детском возрасте. Сб. матер. по антроп. Украины, 1926.

Николаев Л. Антропометрические материалы для изготовления стандартной обуви. Госиздат УССР, 1931.

Его же. Методы установления средних контуров тела и определение уклонений от них. „Антроп. журн.", кн. 3, 1934.

Его же. Зарисовка контуров тела и методы их обработки. „Швейная промышленность", № 6 и 7, 1934.

Следствием этого, в частности, оказывается, что выпускаемые промышленностью размеры изделий не всегда соответствуют спросу потребителя. Наиболее передовые учреждения легкой промышленности обратили серьезное внимание на это обстоятельство и поставили вопрос о необходимости специального изучения изменчивости размеров частей тела для нужд размерной стандартизации изделий.

Начиная с 1930 года такие запросы начали направляться в Институт антропологии, и с этого момента Институт стал уделять самое пристальное внимание исследованию характера изменчивости размеров тела человека и его частей по полу, возрасту и территориям, применительно к запросам промышленной практики.

Кардинальная важность исследования характера и закономерностей изменчивости размеров заключается в том, что если окажется, что детальные размеры частей тела варьируют по кривой не нормального типа и связи между признаками не обладают прямолинейным характером, то в этом случае построение системы соотношения размеров делается очень сложным и трудно разрешимым. Крупная промышленность массовой продукции предметов личного пользования встала бы перед лицом огромных трудностей в вопросе построения рентабельных и рациональных шаблонов. Такие же трудности возникли бы и в связи с вопросом расчетов процентного соотношения размерных номеров выпускаемых изделий.

В результате многолетних исследований размерных признаков на специально собранном многотысячном антропологическом материале, содержащем измерения головы и лица, стопы, кисти, туловища, конечностей и отдельно черепа и длинных костей скелета, в части данных о стопе, разработанных совместно с Центральным научно-исследовательским институтом обувной и кожевенной промышленности, было с несомненностью доказано, что[1]:

а) все размеры тела человека в любой группе населения, вне зависимости от пола, возраста и территории, варьируют по одному и тому же типу, очень близкому к типу, известному под названием нормального;

б) все размеры тела находятся между собой в связи, очень близкой к прямолинейной;

в) группы населения различных территорий, одного и того же пола и возраста, обнаруживают одинаковую степень связи между аналогичными размерными признаками тела, и коэффициенты, выражающие степень связи между аналогичными признаками, должны быть признаны стандартными;

г) степень точности расчетов процентного распределения размеров признаков зависит в основном от степени современности (т. е. на данный момент, так как измерительные признаки во времени подвержены изменчивости) и точности производимых антропологических измерений.

Полученные и доказанные выводы позволили утверждать полную возможность разрешения крупной промышленностью вопроса о ра-

---

[1] 22 неопубликованные работы Научно-иссл. ин-та антропологии МГУ, представленные в виде отчетов в НИШИ, ЦНИКП и другие учреждения за 1931—1949 гг.

Орлов М. Материалы к методике массового обмера стопы для построения рациональной детской обуви. „Антроп. журн.“, кн. 3, 1933.

Зыбин Ю. и Орлов М. Материалы к методике массового обмера стопы для построения рациональной детской обуви. Сб. тр. ЦНИКП, т. II, вып. 1, 1935.

Зыбин Ю. Метод выделения типичных стоп и установление их размеров. „Вестн. кож.-обув. пром.“, № 11, 1935.

Бунак В. В. Анализ распределения типов стопы. Сб. тр. ЦНИКП, 1940.

циональных размерных стандартах изделий для личного пользования. Эти теоретические положения в процессе работы проверялись в приложении к практике, и во всех случаях подтверждалась правильность решения задачи. В отношении размеров стопы во всех возрастах обоего пола это было сделано ЦНИКП и Технологическим институтом им. Кагановича; в отношении других частей тела — рядом отраслей оборонной промышленности в период Великой Отечественной войны.

Как известно, в практике производства предметов личного пользования эти последние стандартизуются не по одному какому-то признаку, принимаемому за основной исходный, а по двум. По первому, основному признаку определяется номер изделия, по второму, который еще до сих пор в большинстве отраслей легкой промышленности разбивается только на два варианта, определяется подномер. Остальные размеры в стандарте устанавливаются в соответствии с величиной двух первых. При этом часто величиной соответствующих дополнительных размеров, как отмечалось выше, принимается их средняя арифметическая величина. Разработанная Институтом антропологии методика размерной стандартизации, основанная на исследовании парных и частных корреляций между признаками и их регрессии с квадратическим отклонением регрессии, дала возможность наиболее правильного выбора ведущих признаков, по которым определяются номер изделия и подномер и варианты последнего внутри номера. Наиболее точное определение соответствующих основным дополнительных размеров достигнуто использованием того же коррелятивного метода. Выбор же основных размеров и числа их является наиболее важной задачей, обусловливающей качество размерной стандартизации.

Кроме рационального построения размерных стандартов, отвечающих особенностям размеров тела населения всего Союза, перед крупной промышленностью стоит и другая не менее сложная задача—задача правильного расчета и определения ростовочного ассортимента, т. е. процентного соотношения необходимых для выпуска размерных стандартов. Известно, что размеры тела населения Союза на его огромных территориях весьма разнообразны, и разные размеры изделий в различных географических районах имеют неодинаковый спрос. Систематизированных же материалов о процентном распределении по территории страны тех или других размеров промышленность не имеет. При отсутствии объективных знаний этого рода не может быть правильного снабжения населения изделиями индивидуального пользования. На первых этапах развития крупной промышленности, когда ее продукция еще не была в состоянии количественно покрыть все более увеличивающиеся потребности населения, неточности ростовочного ассортимента были не так заметны, и в конечном итоге вся продукция сбывалась полностью. По мере же роста мощности промышленности и вступления в строй все большего и большего числа новых фабричных предприятий вопрос о правильном, соответствующем потребностям населения ростовочном ассортименте, становится весьма острым.

Используемые промышленностью таблицы ростов изделий еще и до настоящего времени строились без учета конкретных антропологических данных о населении всего Союза и его отдельных областей. Вследствие этого возникают те трудности в снабжении населения, с которыми на практике ежедневно встречается торговопроводящая сеть. Отсюда возникает затоваривание на складах в отдельных районах одних размеров изделий и острый недостаток в других.

На ряде простых примеров легко убедиться в правильности сказанного и показать, как велик процент неудовлетворенности населения при снабжении его несоответствующим ростовочным ассортиментом изделий.

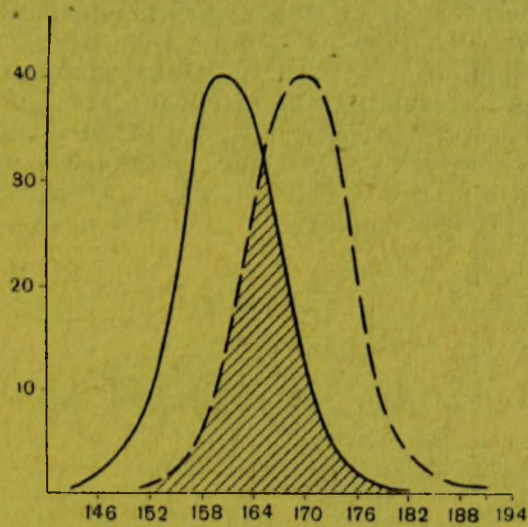


Рис. 1. Длина тела взрослых мужчин: I $M = 162$ *см*; $\sigma = 5{,}5$ *см*; II $M = 170$ *см*; $\sigma = 5{,}8$ *см*.

Если, например, партия какого-либо изделия, стандартизованного по длине тела (росту) с расчетом процентного соотношения размеров применительно к одному географическому району, где средняя длина тела взрослого мужского населения равна 162 *см* при среднем квадратическом уклонении, равном $\pm 5{,}5$ *см*, будет направ-

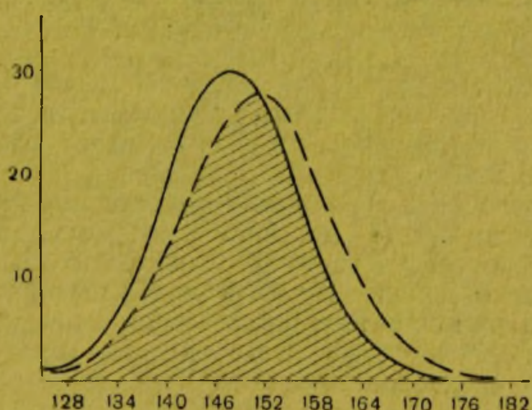


Рис. 2. Длина тела мальчиков: I $M = 148{,}0$ *см*; $\sigma = 7{,}7$ *см*; II $M = 151$ *см*; $\sigma = 8{,}5$ *см*.

лена для снабжения населения другого географического района со средней длиной тела в 170 *см* при среднем квадратическом уклонении, равном $\pm 5{,}8$ *см*, то путем несложных вычислений убеждаемся, что процент неудовлетворенности, т. е. недостаток более крупных размеров, выразится огромной цифрой—54,1% (см. рис. 1). А если сделать наоборот, то в первом из этих районов будет недостача более мелких размеров в том же проценте.

Значительным будет процент неудовлетворенности населения и при меньших абсолютных разницах в средних величинах основного размера. Например, рост мальчиков в возрасте 12—13 лет в одном из географических районов равен 148 *см* ($\sigma = \pm 7{,}7$ *см*), а в другом—151 *см* ($\sigma = \pm 8{,}5$ *см*); неудовлетворенность в этом случае составит 15,1%.

Или другой пример: изделие стандартизовано по размеру обхвата груди. Средняя величина обхвата груди для тех же мальчиков в возрасте 12—13 лет в одном из районов равна 71 *см* ($\sigma = 3{,}9$ *см*); в другом—74,0 *см* ($\sigma = 4{,}4$ *см*); процент неудовлетворенности составит 25,9.

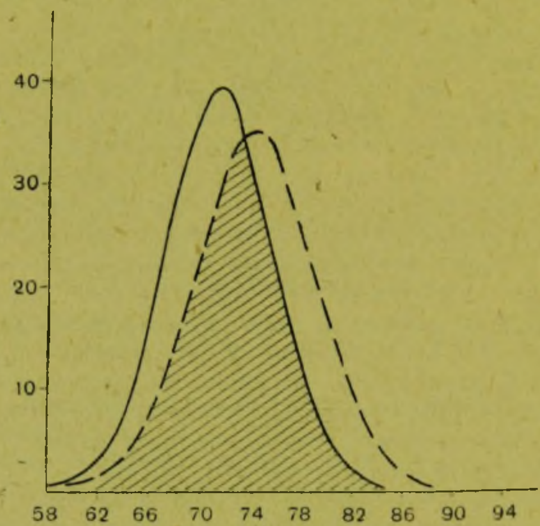


Рис. 3. Обхват груди мальчиков: I $M = 71{,}0$ *см*; $\sigma=3{,}9$ *см*; II $M=74{,}1$ *см*; $\sigma=4{,}4$ *см*.

В доказательство огромной важности антропологических сведений при составлении ростовочного ассортимента можно привести еще много десятков примеров. Отсюда вытекает одно важное положение: для правильного снабжения населения изделиями соответствующих ему размеров, во-первых, необходимо иметь общесоюзные таблицы ассортимента по полу и возрасту, составленные на основе самого строгого учета антропологических данных о населении. Такие таблицы должны служить промышленности для планирования выпуска размеров изделий; во-вторых, необходимы порайонные таблицы для планирования распределения продукции промышленности по товаропроводящей сети.

Настоящее сообщение имеет целью дать самый краткий обзор задач размерно-ростовочной стандартизации изделий для личного пользования, решение которых возможно только при помощи антропологических данных о населении. Многолетние теоретические исследования в этой области обосновали, установив соответствующие закономерности изменчивости размеров тела человека (как тотальных, так и детальных), возможность строить для любого вида изделий размерные стандарты, максимально отвечающие потребностям населения. Одновременно размерная стандартизация, базирующаяся на антропологических материалах, подсказывает пути эволюции техники воспроизводства стандартных шаблонов (например, обувная колодка), а в связи с этим сосредоточивает внимание на требованиях, предъявляемых к обрабатывающим их машинам.

Уже отмечалось ранее, что из всех отраслей гражданской легкой промышленности наибольшее внимание научному обоснованию размерных стандартов уделила обувная промышленность в лице ЦНИКП и Технологического института им. Л. М. Кагановича. Так, проведенными совместно с Институтом антропологии работами было доказано удобство конструирования стандартных обувных колодок по двум ведущим размерам—длине стопы и ширине стопы в пучках (наибольшая ширина стопы в области головок плюсневых костей; этот размер издавна применялся в антропологии для характеристики стопы человека).

В нашей отечественной литературе вопрос рациональной размерно-ростовочной стандартизации на основе антропологических данных в применении к массовому производству изделий на крупных предприятиях до настоящего времени еще недостаточно полно освещен. Еще меньше он разработан за рубежом, так как капиталистический характер организации зарубежной промышленности исключает вопрос о плановой ее организации и плановом централизованном снабжении населения продукцией.

В ниже помещенном изложении П. Н. Башкировым и М. В. Игнатьевым даются многократно проверенные на практике материалы, касающиеся всех основных методических вопросов стандартизации на базе антропологических данных, начиная со следующих данных: определения числа ведущих признаков (2—3), необходимых для конструирования того или другого вида изделия; выбора этих признаков, метода разбивки вариирующего второго признака на категории; увязки дополнительных признаков с ведущими признаками; определения наиболее рационального числа стандартов тех или других видов изделий, т. е. определения момента, после которого введение более дробной нумерации изделия потеряет практический смысл; определения и учета процентного распределения предлагаемых размерных стандартов среди населения по районам; определения процента локальной неудовлетворенности населения в случае распространения среди него несоответствующего ростовочного ассортимента, и прочих методических вопросов, тщательно разрабатываемых коллективом работников Института антропологии Московского университета начиная с 1930 года.

М. В. ИГНАТЬЕВ

АНАЛИЗ АНТРОПОМЕТРИЧЕСКИХ ДАННЫХ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СТАНДАРТОВ[1]

Глава I

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИЗНАКОВ

§ 1. Закономерности изменчивости антропометрических признаков как основа антропологической стандартизации. Статистические параметры

Правильная система размерных стандартов изделий личного пользования (одежды, обуви и т. п.) должна отвечать вполне определенному требованию: при возможно меньшей затрате материалов и капиталовложений привести к достижению наибольшей удовлетворенности населения размерами изделий. Такая цель может быть достигнута в результате надлежащей обработки антропологических данных об изменчивости размеров человеческого тела, его частей и сочетаний размеров. Поэтому построению системы размерных стандартов промышленных изделий и их ассортимента должно предшествовать решение вопросов антропологической стандартизации. Одна из основных задач антропологической стандартизации состоит в том, чтобы представить все разнообразие антропологического состава населения ограниченным числом образцов (типов, вариантов или стандартов), возможно полно отображающих распределение размеров и их сочетаний. Вследствие этого кардинальным вопросом для всей теории антропологической стандартизации является вопрос о форме зависимости между величиною признака и его частотой среди населения или, иначе говоря, о типе кривых распределения размеров человеческого тела и его частей. Удобная и достаточно правильная формула такой кривой является буквально насущной необходимостью. Без нее построение антропологической стандартизации невозможно. Вот почему вопрос о характере распределения антропологических признаков заслуживает первоочередного и подробного рассмотрения.

---

[1] При выполнении помещенных в настоящем издании работ „Анализ антропологических данных, применяемых при построении стандартов“ и „Вопросы построения антропологических стандартов“ большую помощь оказали автору А. В. Пугачева и Е. И. Фортунатова, которые проверили вывод формул и произвели вычисления для этих работ. Автор приносит А. В. Пугачевой и Е. И. Фортунатовой свою благодарность.

Формулировать закон связи между величиною признака человеческого тела и численностью его в населении, по существу, значит обобщить наши повседневные наблюдения и придать им количественную форму. Наблюдения же с несомненностью говорят о наличии какой-то закономерности. Так, например, мы постоянно наблюдаем, что чаще всего встречаются люди среднего роста. Люди же очень большого или очень малого роста встречаются редко. Кроме того, мы замечаем, что одинаковые по величине отклонения от средней в ту и другую сторону наблюдаются одинаково часто, т. е. что людей выше среднего и ниже среднего роста примерно одно и то же количество. Словом, мы наблюдаем, что частота отклонений от средней в том и другом направлении убывает по мере возрастания величины отклонения. Для решения задач антропологической стандартизации необходимо выразить эту закономерность в простейшей количественной форме. Но чтобы формулировать наблюдаемый закон изменчивости, прежде всего нужно найти какую-нибудь ее меру.

Представление о различиях между элементами любой совокупности, например, о различиях между людьми по росту или по весу, можно дать самыми разнообразными способами. Так, можно вычислить попарные разницы между людьми и вывести среднюю разницу между всеми возможными парами людей, образующих данный коллектив. Независимо от громоздкости потребных вычислений (которая, впрочем, является только кажущейся), такая средняя разница, несомненно, служит наглядным показателем внутригрупповой изменчивости. Однако по соображениям математического удобства вместо средней разницы обычно принимается так называемое среднее квадратическое отклонение. Среднее квадратическое отклонение вместе со средней арифметической являются основными статистическими параметрами, характеризующими статистическую совокупность, или теми постоянными для данной совокупности величинами, посредством которых можно выразить соотношение между возрастанием уклонения от средней и уменьшением его частоты. Подобно тому как средняя арифметическая дает первое общее представление о характерной для совокупности величине признака, среднее квадратическое отклонение характеризует изменчивость признака. Оно представляет собою квадратный корень из среднего квадрата отклонений от средней арифметической. Для того чтобы выразить оба параметра формулами, обозначим величину признака через x, частоту признака в каком-нибудь интервале его значений через n_x, среднюю арифметическую через M, среднее квадратическое отклонение через σ (сигма). Тогда

$$M = \frac{\Sigma x n_x}{N}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x - M)^2 n_x}{N}}, \quad \text{где } N = \Sigma n_x$$

(символ Σ обозначает сумму подобных слагаемых). Простой способ вычисления средней арифметической и среднего квадратического отклонения антропометрических признаков приводится в приложении 1.

Знание средней арифметической и среднего квадратического отклонения в силу самих свойств этих величин дает возможность производить некоторые расчеты о численностях значений величин, из которых они получены, и притом без всяких дополнительных условий о характере их распределения, даже при совершенно произвольном наборе чисел. Этот поразительный факт представляет собою содержание знаменитой теоремы великого русского математика П. Л. Чебышева. Опираясь на нее, можно заранее указать максимум относительного числа величин, превосходящих некоторое заданное число. В общем виде вероятность, что отклонение величины x от средней арифметической превзойдет среднее квадратическое отклонение в k раз, не более чем $\frac{1}{k^2}$. Символически:

$$P(|x-M| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}. \tag{1}$$

Примем для иллюстрации, что в какой-нибудь группе мужского населения средняя длина тела (рост[1]) равна 167 *см*, среднее же квадратическое отклонение равно 6 *см*. Тогда на основании только двух этих данных при любом характере распределения роста, хотя бы самом необычном, с почти полной достоверностью можно утверждать, что не менее 75% людей будут иметь рост в пределах от 155 до 179 *см* и не более 25% — за этими пределами.

Возможность уточнения расчетов значительно возрастает, если мы имеем дело с распределениями такого рода, которые наблюдаются в антропологии, т. е. тогда, когда среднее значение встречается чаще всего, а отклонения в ту и другую сторону от средней примерно одинаковы по численности. Такие распределения называются одновершинными и симметричными. Для таких случаев приведенная формула может быть заменена следующей:

$$P(|x-M| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{4}{9k^2}. \tag{2}$$

Применяя эту формулу, мы можем утверждать без всяких дальнейших предпосылок, что в любой неподобранной совокупности в пределах от 155 до 179 *см* будет в среднем находиться не менее $^8/_9$ общей численности (разумеется, при тех же параметрах).

Таким образом, утверждения, которые иногда приходится встречать, что будто бы не существует никаких закономерных распределений признаков и что численности тех или иных классов совершенно не поддаются никакому закономерному определению, не соответствуют действительности. Подобные утверждения, основанные на незнании математических фактов, приносят несомненный вред, так как разоружают исследователя, имеющего дело с массовым материалом, в его практической работе.

§ 2. Нормальное распределение

Приведенные положения о связи между величиною и частотою признака хотя и показательны, но еще недостаточны для того, чтобы их можно было применять при решении задач антропологической стандартизации. Они не обладают необходимой точностью и неудобны для пользования. Еще недостаточно исходить из симметричности распределения; очевидно, нужно принять некоторые дополнительные допущения; естественно сделать их наименее стеснительными, наиболее общими, т. е. применимыми к максимальному числу встречающихся в действительности положений. Математические исследования, опирающиеся на труды знаменитых русских ученых — П. Л. Чебышева,

---

[1] В настоящей и во второй статье того же автора под ростом подразумевается длина тела в антропологическом понимании (без обуви).

А. М. Ляпунова, А. А. Маркова, показывают, что такое условие приводит к формуле так называемого нормального распределения или нормального закона. Его значение полно вскрыто А. М. Ляпуновым, именем которого названа фундаментальная теорема об условиях осуществления нормального распределения (опубликованная в 1901 году[1]). Поэтому кривую нормального распределения по праву называют кривой Ляпунова[2]. На ней необходимо остановиться подробнее, вследствие значения, которое она имеет для антропологической стандартизации.

Под нормальным распределением подразумевают определенную функциональную зависимость между величиною признака и его частотой в совокупности. Как многие функциональные зависимости между двумя переменными, она может быть выражена трояко: в табличной форме, графически и при помощи формулы (аналитически). Для табличного выражения нормального распределения может послужить пример распределения длины тела при тех же параметрах, что и выше: $M=167$ *см*, $\sigma=6$ *см* (см. табл. 1).

В первом столбце таблицы приведены интервалы или классы значений признака, на которые он разбивается для удобства выражения. Они называются также вариантами. В третьем столбце приведены определенным образом вычисленные относительные численности этих классов; в четвертом — накопление частот по мере увеличения числа классов; этот ряд называется начетным или накопленным.

Таблица 1

Нормальное распределение длины тела при $M=167$ *см* и $\sigma=6$ *см*

Интервалы в *см*	Центральные значения интервалов	Относительные численности на 1000	Накопленный ряд
1	2	3	4
144,5 — 147,5	146	1	1
147,5 — 150,5	149	2	3
150,5 — 153,5	152	8	11
153,5 — 156,5	155	26	37
156,5 — 159,5	158	64	101
159,5 — 162,5	161	123	224
162,5 — 165,5	164	176	400
165,5 — 168,5	167	200	600
168,5 — 171,5	170	176	776
171,5 — 174,5	173	123	899
174,5 — 177,5	176	64	963
177,5 — 180,5	179	26	989
180,5 — 183,5	182	8	997
183,5 — 186,5	185	2	999
186,5 — 189,5	188	1	1000

Как видно из приведенных в таблице чисел, в пределах от 155 до 179 *см* заключено около 95% общей численности наблюдений. Это не находится в противоречии с положениями (1) и (2) формул, но уточняет их.

Графические изображения нормального распределения и накопленного ряда даются на прилагаемых рис. 1 и 2. Их можно получить, построив ряд точек, принимая в качестве абсцисс значения признаков, в качестве ординат их численности и соединяя полученные точки плавной линией. Первую кривую называют также нормальной кривой или нормальной плотностью вероятностей; вторую — нормальной функцией распределения или интегральной кривой нор-

[1] Ляпунов А. М. Nouvelle forme du théorème sur la limite des probabilités. Mém. Acad. Sc. Pétersbourg, 1901.

[2] Она называется также кривой Муавра, Гаусса или Лапласа, впервые получивших ее формулу из предпосылок, относящихся к ограниченным классам явлений

мального распределения. Рис. 1 показывает, что нормальная кривая одновершинна и симметрична.

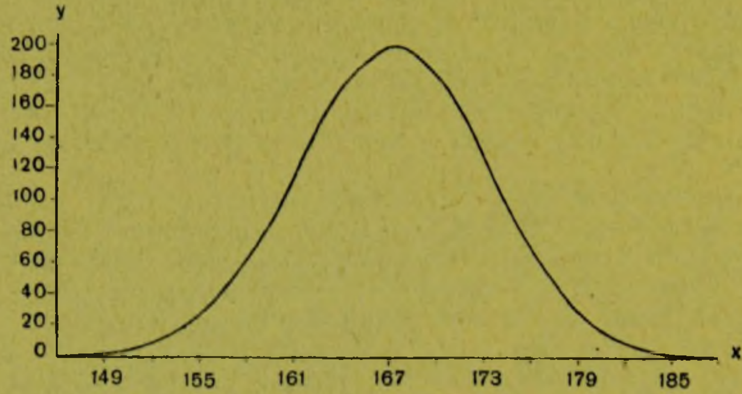


Рис. 1. Нормальное распределение

Формула кривой имеет вид:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3}$$

а численность признака в небольшом интервале Δx равна

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} \Delta x \tag{3'}$$

(в нашем примере $\Delta x = 3$).

Из формул (3) и (3′) видно, что относительные численности в каждом данном интервале вполне определенным образом выражаются в зависимости лишь от средней величины признака, его изменчивости, измеряемой σ, и величины интервала.

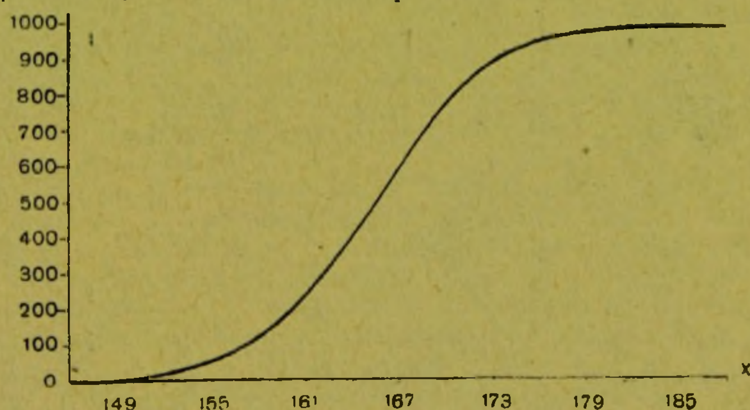


Рис. 2. Интегральная кривая нормального распределения

Кривая симметрична относительно средней арифметической. Аналитически это выражается условием, согласно которому средняя из третьих степеней отклонений[1], называемая третьим моментом и обо-

[1] Здесь и ниже, где не оговорено, под отклонениями подразумеваются отклонения от средней арифметической.

значаемая через μ_3, равна нулю. Поэтому асимметрия какого-либо распределения выражается величиною

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \tag{4}$$

где $\mu_2 = \sigma^2$ — квадрат среднего квадратического отклонения, называемый также вторым моментом. Величина γ_1 носит название асимметрии или скошенности.

От других одновершинных симметричных кривых нормальная кривая отличается значением центральной ординаты или вершинностью. Нормальная вершинность определяется простым условием: средняя из четвертых степеней отклонений, называемая четвертым моментом — μ_4, в три раза больше квадрата второго момента. Поэтому отклонение какого-либо распределения от нормальной вершинности выражается величиною

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3, \tag{5}$$

называемой эксцессом.

Расчеты, основанные на нормальном распределении, в частности, определение относительной численности людей, величина признака которых заключена в данном интервале значений, могут быть выполнены при помощи специальных таблиц ординат, или площадей (интегралов) нормальной кривой. Таблицы приводятся в приложении 4 к настоящей статье. Чтобы пользоваться ими, необходимо выразить значения признака в виде отклонений от средних арифметических, деленных на свои средние квадратические отклонения. Такая операция называется нормированием; нормированные значения часто обозначаются буквой t, так что $t = \frac{x - M}{\sigma}$. Для примера найдем численность людей ростом от 166,5 *см* до 167,5 *см*, если средняя величина в коллективе равна 167 *см*, а среднее квадратическое отклонение — 6 *см*. Задача может быть решена при помощи одной из трех таблиц приложения 4. Чтобы выполнить ее при помощи 1-й таблицы — ординат $f(t)$ (табл. 18), следует найти значение середины интервала и нормировать его. Получим $t = (167 - 167) : 6 = 0$. Затем входим в таблицу с аргументом[1] 0 и видим, что $f(0) = 0{,}3989$. Помножаем это число на величину нормированного (поделенного на σ) интервала, равного $\frac{167{,}5 - 166{,}5}{6} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$. Получаем $P(0{,}1667) = 0{,}3989 \cdot 0{,}1667 = 0{,}0664 = 6{,}6\%$. Так же может быть найдена численность в любом интервале, если только он не велик. Этот метод удобен при вычислении большего числа значений кривой.

Чтобы пользоваться 2-й (или 3-й) таблицей, нужно сначала нормировать границы интервала; получаем:

$$t_1 = \frac{166{,}5 - 167{,}0}{6} = -0{,}083; \quad t_2 = \frac{167{,}5 - 167{,}0}{6} = +0{,}083.$$

Входя во 2-ю таблицу (№ 19) с значением $t = 0{,}083$, найдем (после интерполяции) тот же ответ: $F(0{,}083) = 6{,}6\%$. 2-й таблицей удобно пользоваться тогда, когда ищется численность внутри интервала с равноотстоящими от средней величины границами. В частности, при помощи этой таблицы найдем, что численность людей с ростом

[1] Под аргументом подразумевается заданное значение t, для которого в таблице приведено соответствующее ему искомое значение $f(t)$.

внутри интервала 155—179 *см* (т. е. при $t=2$), в соответствии с предыдущими расчетами, составляет 95,45%.

3-й таблицей (№ 20) удобно пользоваться во всех прочих случаях, например, когда требуется найти численность внутри интервала 163—169 *см*. В этом случае

$$t_1=(163-167):6=-0{,}67;\quad t_2=(169-167):6=0{,}33.$$

В таблицу войдем сначала с большим аргументом 0,33 и найдем Ф (0,33) = 0,6293, затем — с меньшим и получим: Ф (— 0,67) = 0,2514; вычитая одно из другого, найдем ответ: 0,3779 = 37,8%. По ходу изложения нам придется пользоваться каждой из этих таблиц.

Большой простотой отличается также получение численностей нормального распределения при помощи построенной в Институте антропологии номограммы № 1, приведенной на рис. 3. На номограмме нанесены три шкалы: две крайних — с пометками для t и средняя — с пометками для численностей нормального распределения. Если заданы t_1 и t_2, то искомая численность находится на пересечении средней шкалы с линией, соединяющей пометки t_1 и t_2 на крайних шкалах. Определим, например, сколько имеется людей, обхват груди которых заключается между 92 и 94 *см* при средней $M=88$ *см* и (сигме) $\sigma=4$ *см*. Отклонения от средней для одной границы интервала —4 (92—88) *см*, для другой —6 (94—88) *см*. Деля на сигму, найдем для одной границы $t_1=\frac{x-M}{\sigma}=\frac{4}{4}=1$; для другой $t_2=\frac{6}{4}=1{,}5$. Отыскиваем на левой шкале 1, на правой 1,5 (или наоборот) и, соединив эти точки линейкой или нитью, найдем, что на средней шкале линейка или нить попадает в точку 9. Это значит, что людей с заданными размерами грудной клетки в данном коллективе имеется примерно 9%. Если внутри интервала находится значение средней арифметической, то номограммой приходится пользоваться дважды: один раз для определения численности в пределах от 0 до отрицательного отклонения, другой—от нуля до положительного отклонения, и результаты следует сложить. Например, предлагается найти относительную численность людей с размерами грудной клетки по обхвату от 84 до 94 *см*; нормирование этих значений дает $t_1=\frac{84-88}{4}=-1$ и $t_2=\frac{94-88}{4}=1{,}5$. При помощи номограммы найдем, что между t_1 и 0 содержится 34% совокупности, между 0 и t_2—43%, в сумме получается 77%. Так же рассчитываются и другие численности.

Мы будем применять нормальную кривую исключительно в качестве интерполяционной, т. е. дающей возможность приближенно определять частоты (значения функции) по величине признака (независимой переменной). Для наших целей достаточно удовлетворяться лишь известным приближением к нормальной кривой и не требовать точного совпадения с нею действительных распределений. Тем не менее применение формулы нормального закона допустимо лишь, когда фактические расхождения между наблюдаемыми и нормальными распределениями не достигают очень больших размеров. Поэтому большое практическое значение приобретает вопрос о том, насколько действительные распределения измерительных антропологических признаков соответствуют нормальным кривым, ожидаемым при наблюдаемых параметрах (средней M и среднем квадратическом отклонении σ).

§ 3. Фактический материал. Оценки соответствия

Фактический материал убеждает в возможности положить в основу расчетов по стандартизации закон нормального распределения.

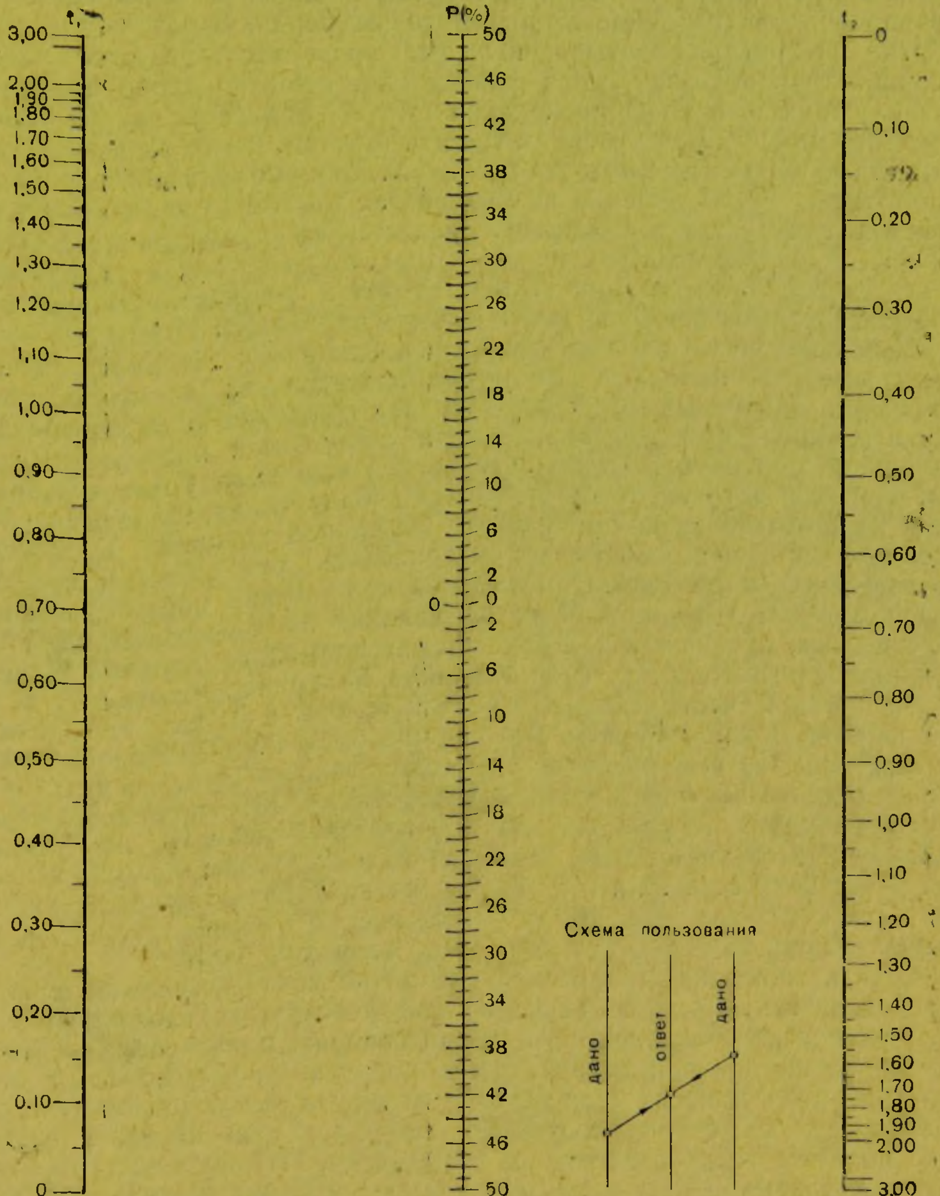


Рис. 3. Номограмма. Нахождение численностей по нормальному распределению

В этой связи прежде всего необходимо отметить значительное число литературных указаний. Так, применительно к размерам тела, имеющим отношение к производству одежды, вопрос рассмотрен В. В. Бунаком[1]. На ряде многочисленных наблюдений В. В. Бунак пришел к выводу о приблизительно нормальном распределении всех важнейших размеров, принимаемых в расчет при конструировании швейных изделий. Обширные и тщательно разработанные материалы по стопе

[1] Бунак В. В. Антропометрические материалы для установления размеров одежды. Вып. 1, М., 1932, стр. 10—17.

приводятся в работах Ю. П. Зыбина[1]. Ю. П. Зыбин разносторонне исследовал вопросы антропологической стандартизации применительно к производству обуви и сделал большой вклад в теорию стандартизации. Так, Ю. П. Зыбин исследовал вопрос о закономерностях распределения размеров стопы среди населения. В результате обработки материала, схватывающего несколько десятков тысяч наблюдений, было показано, что распределение стоп по длине подчинено закону нормального распределения и что эмпирические кривые распределения могут быть заменены теоретическими. В том же направлении вместе с Ю. П. Зыбиным работал X. X. Лиокумович[2], подтвердивший положения Ю. П. Зыбина на материалах по обмеру стоп в воинских частях семи военных округов. Заслуживают внимания наблюдения Ю. П. Зыбина о том, как низовые торгующие организации, в результате опыта, чисто эмпирически подходят к установлению ростовочного ассортимента, выражаемого законом нормального распределения[3].

Большое число наблюдений о распределениях антропологических признаков накопилось в результате исследований Института антропологии. Они также могут служить для суждения о характере действительного распределения, в связи с чем были подвергнуты специальной обработке. Стремясь охватить возможно более обширный материал, и в то же время избежать дублирования, мы ограничились для каждого признака лишь одной локальной группой[4]. Но распределения по возможности рассматривались для обоих полов, что в известной мере служит целям контроля. Таким образом, в нашем распоряжении оказалось 54 распределения по следующим 29 количественным признакам: 1) Окружность головы, 2) продольный диаметр, 3) поперечный диаметр, 4) высота лица, 5) верхняя высота лица, 6) высота нижней части лица, 7) высота головы I, 8) высота головы II, 9) ширина межглазничная, 10) ширина скуловая, 11) ширина нижнечелюстная, 12) ширина носа, 13) обхват головы, 14) длина уха, 15) дуговое расстояние между ушными отверстиями, 16) отношение поперечного диаметра к продольному, 17) плечевой диаметр, 18) тазовый диаметр, 19) обхват груди, 20) длина тела, 21) длина корпуса, 22) длина руки, 23) длина кисти, 24) длина ноги, 25) длина стопы, 26) ширина стопы, 27) вес тела, 28) удельный вес, 29) объем тела[5]. Для четырех размеров недостает данных по женскому полу.

Для каждого из этих распределений найдена нормальная кривая, имеющая такую же среднюю арифметическую и такое же среднее квадратическое отклонение, или, как говорят, произведено выравнивание по нормальной кривой. Часть полученных результатов, а именно все относящиеся к мужскому полу, за исключением четырех малочисленных совокупностей (длина уха, длина кисти, удельный вес и объем тела), изображены графически. На рис. 4—28 нанесены как наблюденные распределения в виде ломаной, называемой многоугольником (полигоном) частот, так и плавные нормальные кривые.

---

[1] Зыбин Ю. П. Основные теоретические положения к разработке ассортимента обуви по размерам. Известия ЦНИКП, № 8, 1932. Технология обувного производства. Т. 1, вып. 1, 1933. Метод выделения типичных стоп и установление их размеров, „Вестн. кож.-обув. пром.", № 11, 1935; Ростовочный ассортимент для обуви. Сб. „Вопросы стандартизации", М., 1946.

[2] Лиокумович X. X. Некоторые вопросы отбора типов и подтипов стопы при проектировании колодок и обуви. Сб. „Вопросы стандартизации", 1946.

[3] См. Зыбин Ю. П. Ростовочный ассортимент и т. д., стр. 38.

[4] Предпочтение отдавалось группам, которые представлены наибольшим числом наблюдений.

[5] О принятых измерениях см. Бунак, В. В. Антропометрия, М., 1941, стр. 58—128.

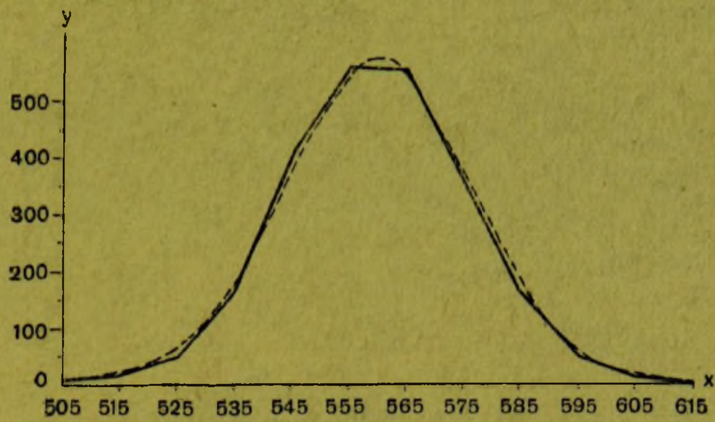


Рис. 4. Окружность головы (в *мм*)

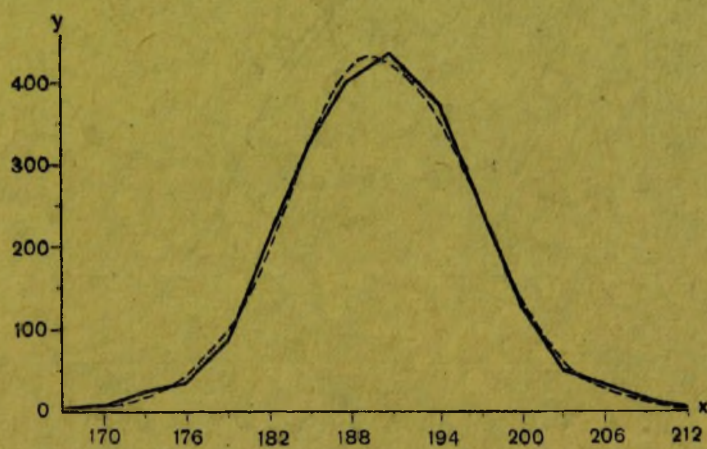


Рис. 5. Продольный диаметр головы (в *мм*)

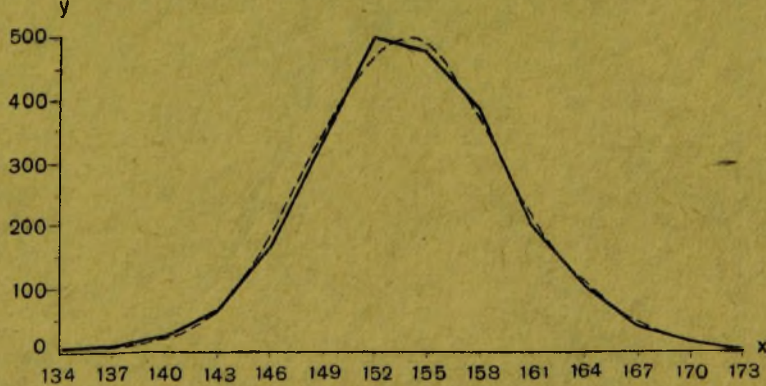


Рис. 6. Поперечный диаметр головы (в *мм*)

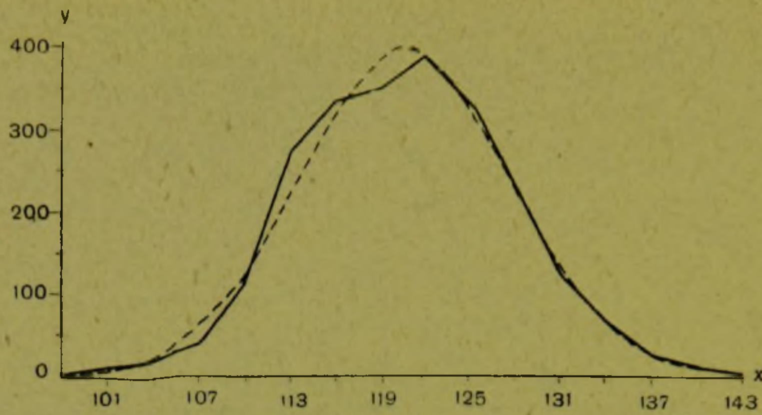


Рис. 7. Высота лица (в *мм*)

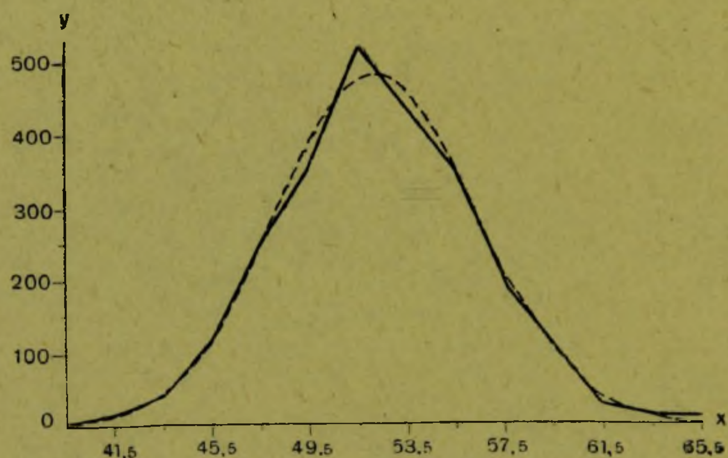


Рис. 8. Верхняя высота лица (в *мм*)

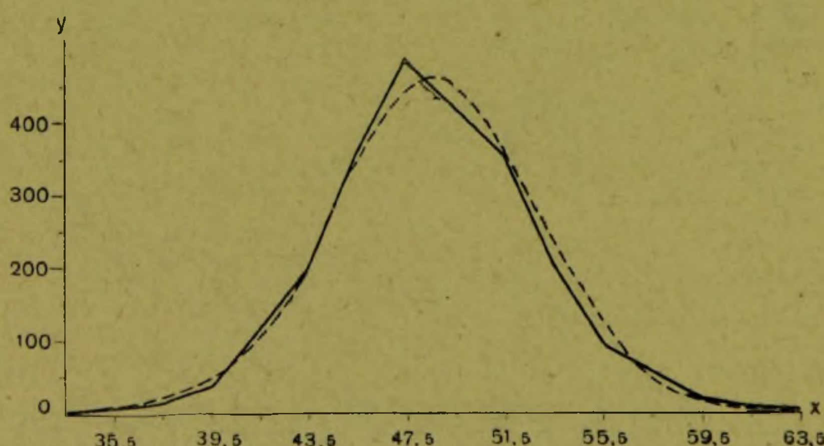


Рис. 9. Высота нижней части лица (в *мм*)

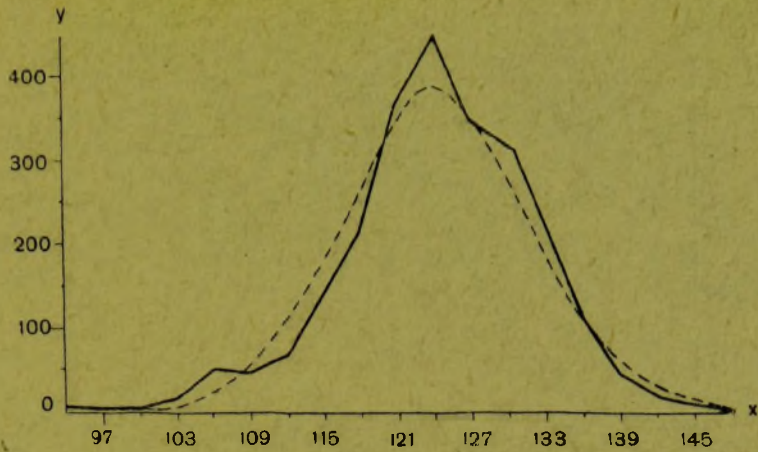


Рис. 10. Высота головы I (в *мм*)

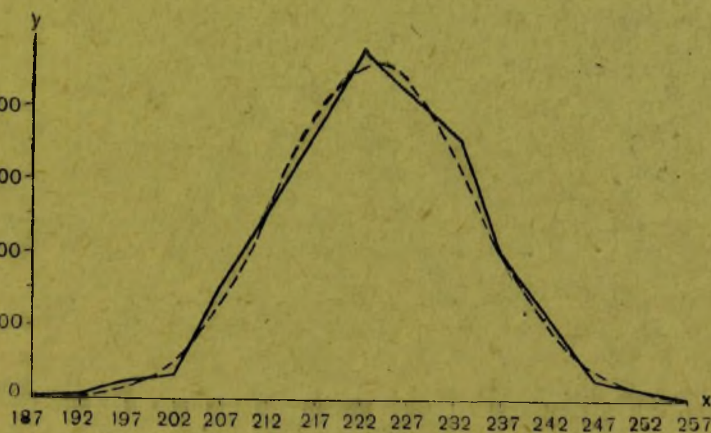


Рис. 11. Высота головы II (в *мм*)

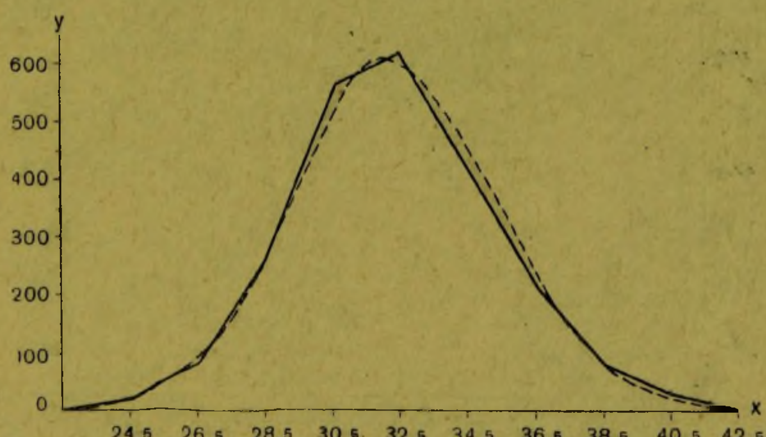


Рис. 12. Ширина межглазничная (в *мм*)

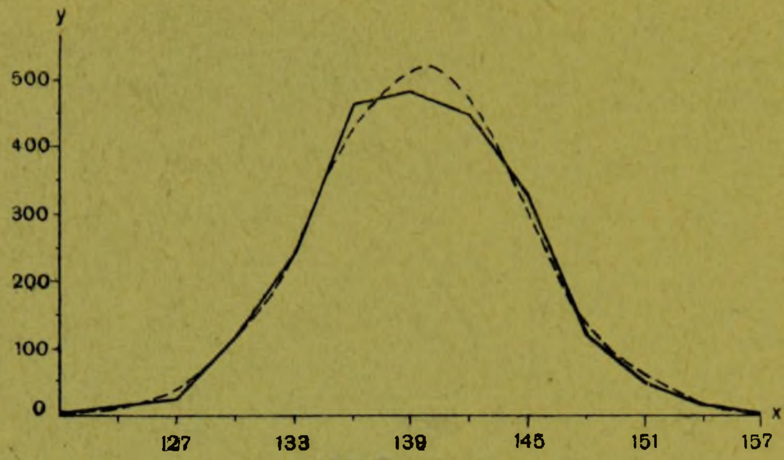


Рис. 13. Ширина скуловая (в *мм*)

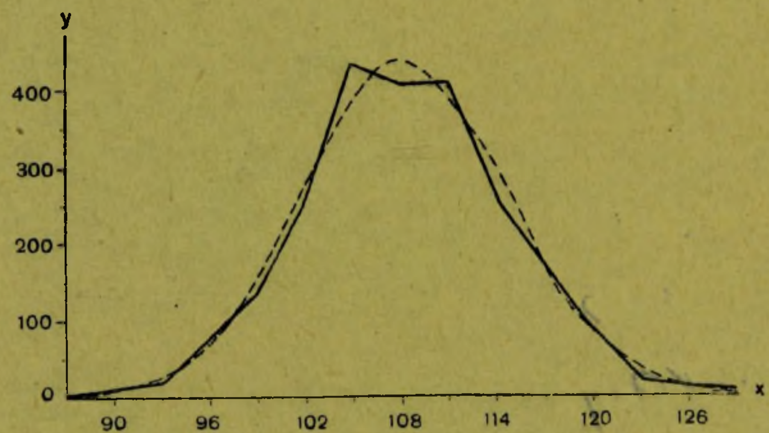


Рис. 14. Ширина нижнечелюстная (в *мм*)

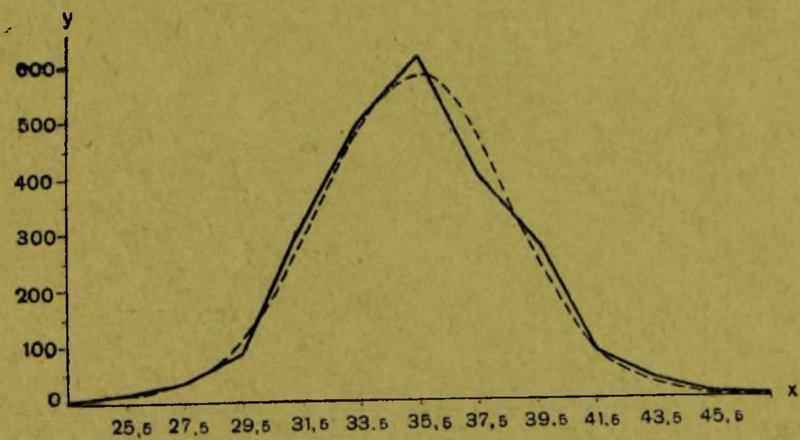


Рис. 15. Ширина носа (в *мм*)

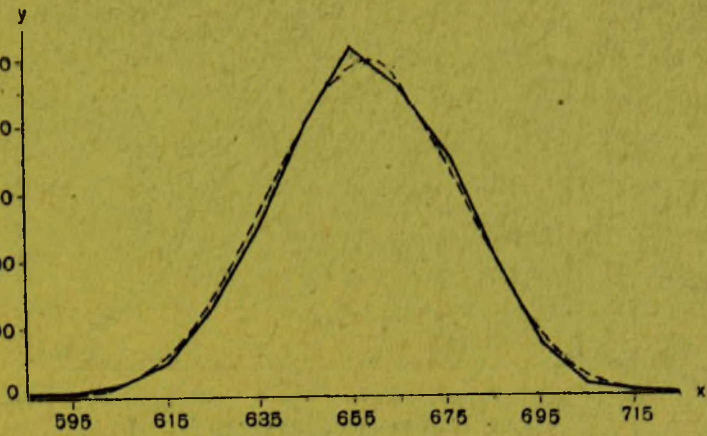


Рис. 16. **Обхват головы (в *мм*)**

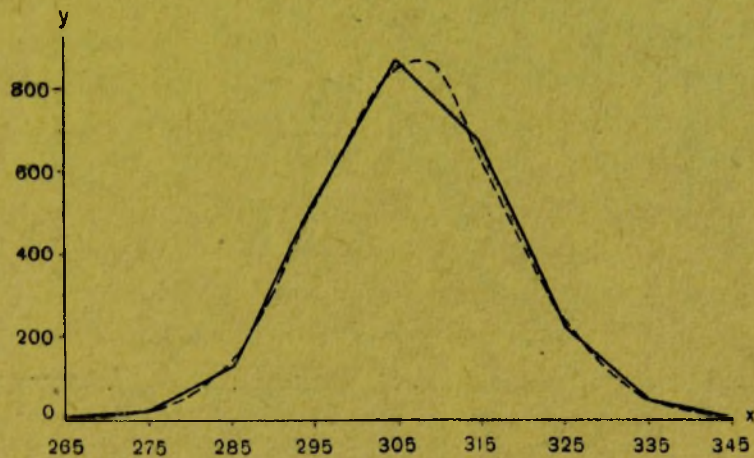


Рис 17. **Дуговое расстояние между ушными отверстиями (в *мм*)**

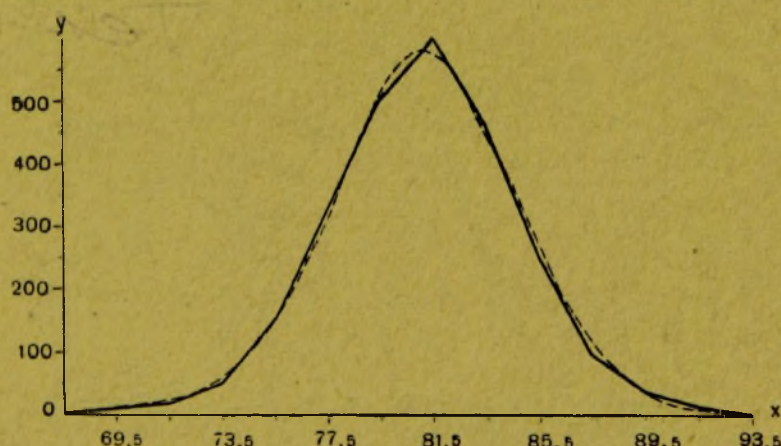


Рис. 18. **Отношение поперечного диаметра к продольному (в %)**

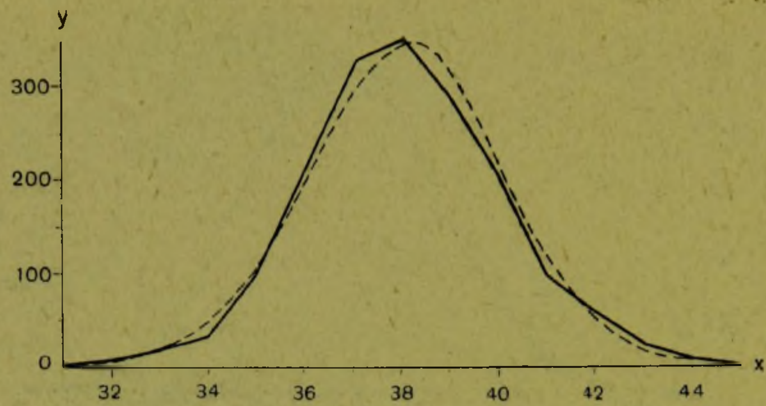


Рис. 19. Плечевой диаметр (в *см*)

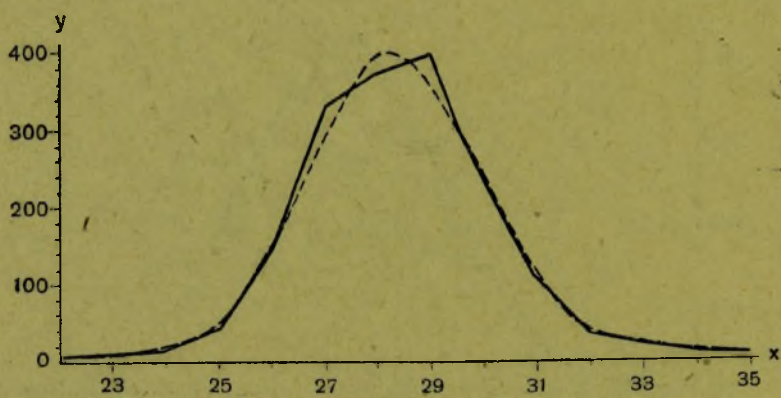


Рис. 20. Тазовый диаметр (в *см*)

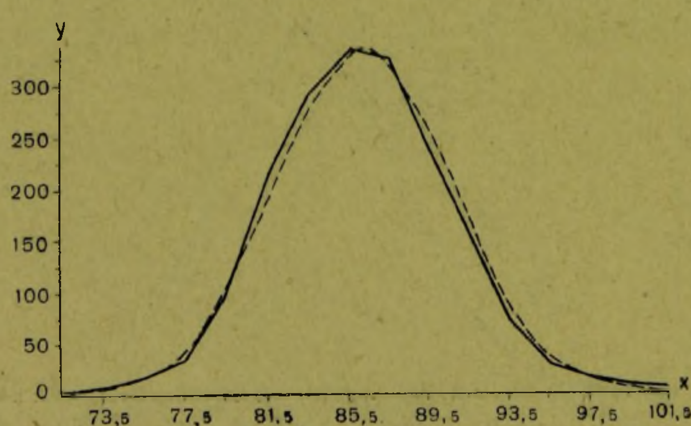


Рис. 21. Обхват груди (в *см*)

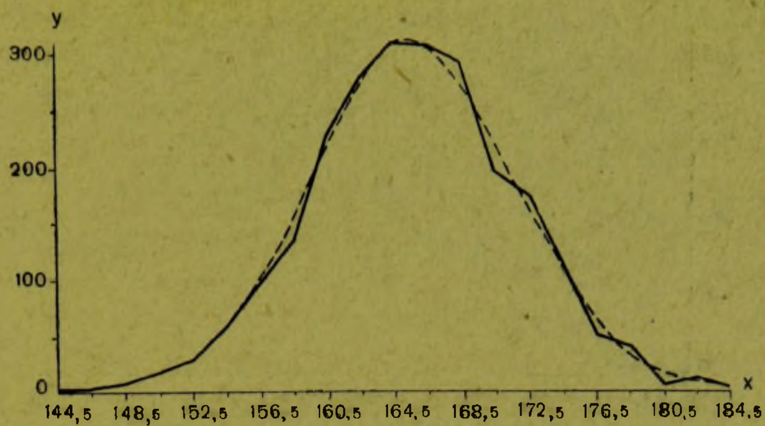


Рис. 22. Длина тела (в *см*)

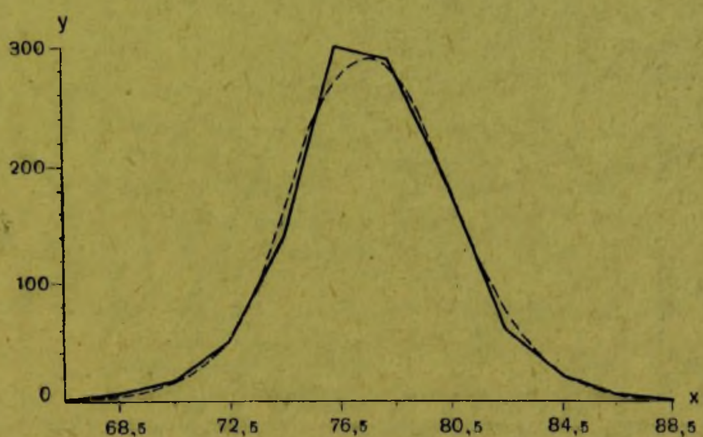


Рис. 23. Длина корпуса (в *см*)

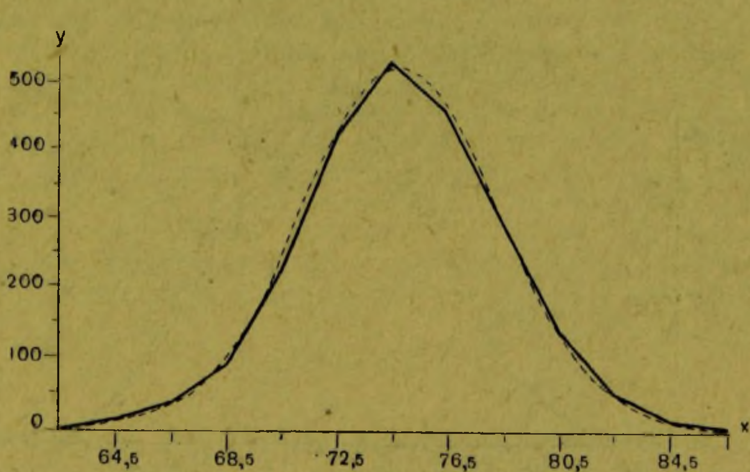


Рис. 24. Длина руки (в *см*)

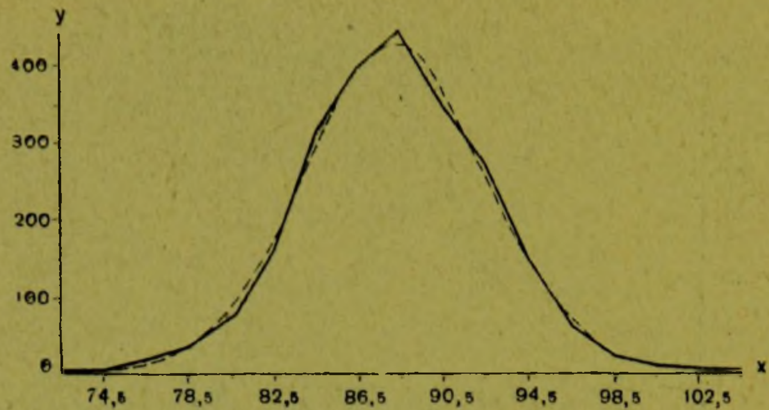


Рис. 25. Длина ноги (в *см*)

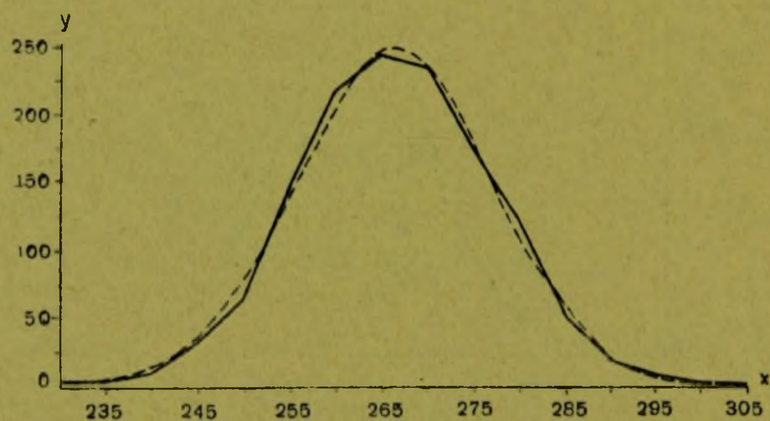


Рис. 26. Длина стопы (в *мм*)

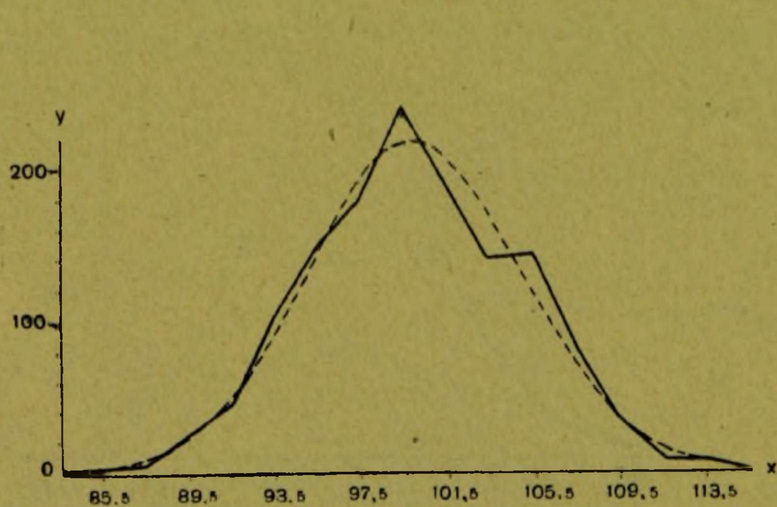


Рис. 27. Ширина стопы (в *мм*)

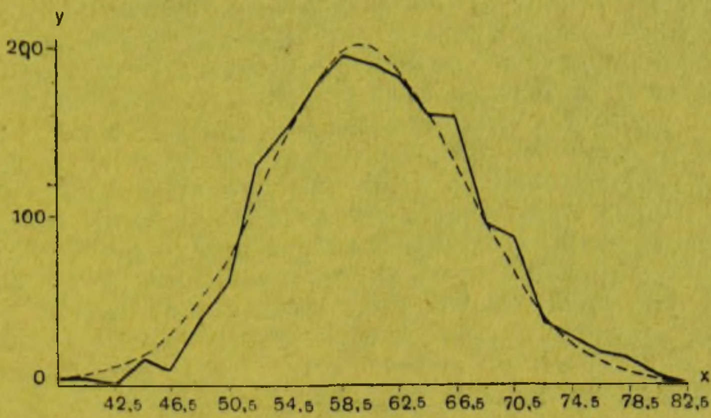


Рис. 28. Вес тела (в *кг*)

Непосредственное зрительное восприятие убеждает нас в том, что, действительно, все наблюдаемые кривые очень мало отличаются от нормальных. Наиболее заметные отклонения приходятся на вес тела, ширину стопы и ширину носа (по которой имеются данные лишь по мужскому полу).

Расхождение кривых заключается, однако, не в том, что наблюдаемые распределения обнаруживают какую-нибудь скошенность или эксцесс, а в нарушениях плавности, в наличии зигзагов, которые при данных числах наблюдения оказались неустраненными. Расхождения между наблюдаемыми и ожидаемыми нормальными распределениями производят впечатление случайных, и нет оснований ожидать, что они воспроизведутся при повторных аналогичных наблюдениях.

Для количественной оценки соответствия между наблюдаемыми и ожидаемыми кривыми в статистике предложен ряд приемов, называемых критериями согласия эмпирического и теоретического распределений. Применительно к нашему вопросу их идея заключается в том, что наблюдаемое распределение рассматривается как полученное в выборке из нормальной совокупности и, в силу ограниченности объема выборки, не вполне совпадающее с нормальным распределением. Определив какой-нибудь мерой степень получившегося расхождения, мы можем искать вероятность того, что случайная выборка даст расхождение, достигающее такой же или большей степени. Если эта вероятность не очень мала (порядка не менее 0,01 или 0,05), то расхождение считается допустимым. Полагают, что таким способом находят ответ на вопрос о том, соответствует ли наблюдаемое распределение гипотезе нормальности исходной совокупности (из которой предположительно произведена выборка). Наиболее распространенным критерием является так называемая функция χ^2. Она представляет собою сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от ожидаемых, поделенных на ожидаемые:

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i},$$

где n_i—наблюдаемые и $\bar{n}_i$—ожидаемые численности в i—ом интервале или классе значений признака. Эта функция хорошо изучена, составлены таблицы ее вероятностей $P(\chi)$, чем и объясняется ее широкое применение. Гипотеза нормального распределения отвергается, если $P(\chi) < 0{,}01$. Советские математики наряду с этой мерой соответствия выдвинули другой критерий, получивший название критерия λ[1]. В качестве меры расхождения принимается величина D', представляющая собою наибольшую абсолютную разницу между значениями наблюдаемого и ожидаемого накопленных рядов. Вероятность, что в случайной выборке величина D' превосходит $\sqrt{N}$ (N—численность выборки) в λ раз, обозначается через $P(\lambda)$, и когда $P(\lambda) < 0{,}01$ (или $\lambda > 1{,}63$), то гипотезу о принадлежности выборочного распределения к нормальному можно считать отвергнутой. Критерий λ более „терпим", чем критерий χ^2, так как накапливание частот приводит к сглаживанию рядов и устранению некоторых зигзагов эмпирического распределения. Поэтому вполне естественны расхождения между результатами применения этих двух критериев. В табл. 2 приводятся оба критерия[2], причем во всех случаях критерий λ действительно дает более высокую оценку соответствия, ибо $P(\lambda)$ всюду выше, чем $P(\chi)$. Первый критерий допускает принадлежность эмпирических кривых к нормальному распределению в некоторых случаях, в которых по критерию χ^2 такая возможность исключается[3].

Из табл. 2 видно, что если пользоваться критерием χ^2, то из 54 распределений лишь 12 дают значение $P(\chi) < 0{,}01$, и поэтому их принадлежность к нормальному распределению статистически недостоверна. Это относится к следующим признакам: у мужчин—высота нижней части лица, обе высоты головы, межглазничная ширина, нижнечелюстная ширина, плечевой диаметр, ширина носа, ширина стопы и вес; у женщин—вес, ширина стопы и обхват груди. Из них, однако, в 6 случаях отступление от нормальности распределения по одному полу не подтверждается данными по другому полу, и лишь для трех из 29 признаков—для ширины носа (по которой нет данных о женщинах) и для ширины стопы и веса критерий χ^2 дает основание усомниться в принадлежности их распределений к нормальному. Как уже отмечено, диаграмма обнаруживает в этих случаях повышенную изломанность эмпирических распределений. Что касается критерия λ, то он отвергает возможность нормального распределения лишь в одном из 54 случаев. Таким образом, применение статистических критериев к обширному эмпирическому материалу не оставляет сомнений в том, что нормальные или близкие к нормальным распределения действительно являются преобладающим типом распределений количественных антропологических признаков. Но статистический критерий пригодности нормальной кривой для выравнивания распределений антропологических признаков отнюдь не совпадает с критерием практического соответствия. Он не решает вопросов о том, насколько получающееся при пользовании нормальным распределением приближение приемлемо для практических целей и как велика может быть погрешность, если мы произведем расчеты

---

[1] См. Смирнов Н. В. Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения. Бюлл. МГУ, т. II, вып. 2, М., 1939, Романовский В. И. Применения математической статистики в опытном деле, М.—Л., 1947, стр. 34; Математическая статистика, М.—Л., 1938; Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России, М.—Л., 1946, стр. 226.

[2] О приведенной в той же таблице погрешности П речь идет ниже.

[3] Высокие значения χ^2 в нашем материале получаются из-за несоответствия на концах кривых, что имеет малое практическое и познавательное значение. Вообще критерий χ^2 в высокой степени зависит от группировки материала. Это является его существенным недостатком.

Таблица 1

Показатели согласия $P(\chi)$ и $P(\lambda)$ наблюдаемых распределений с нормальными кривыми и погрешность П в %

Признаки	Мужчины			Погрешность	Женщины			Погрешность
	N	$P(\chi)$	$P(\lambda)$	П	N	$P(\chi)$	$P(\lambda)$	П
1. Окружность головы	2309	0,34	0,88	2,60	1086	0,05	0,76	4,14
2. Продольный диаметр головы	2309	0,14	0,99	2,60	1089	0,71	1,00	2,66
3. Поперечный диаметр головы	2310	0,77	0,99	1,73	1089	0,03	0,61	4,78
4. Высота лица	2307	0,02	0,59	3,64	1086	0,26	0,86	3,93
5. Верхняя высота лица	2398	0,15	0,82	2,98	1088	0,08	0,81	3,95
6. Высота нижней части лица	2396	0,003	0,37	3,80	1086	0,39	0,81	3,40
7. Высота головы I	2399	0,00	0,00	6,84	1088	0,66	1,00	2,57
8. Высота головы II	2393	0,008	0,99	3,38	1086	0,71	1,00	2,21
9. Ширина межглазничная	2307	0,00	0,19	3,90	1084	0,03	0,71	4,52
10. Ширина скуловая	2310	0,10	0,99	2,81	1086	0,59	1,00	2,49
13. Ширина нижнечелюстная	2303	0,004	0,86	4,04	1085	0,025	0,99	4,61
12. Ширина носа	2307	0,002	0,21	4,16	—	—	—	—
13. Обхват головы	2396	0,75	1,00	1,84	1088	0,92	1,00	2,02
14. Длина уха	133	0,69	0,99	7,52	—	—	—	—
15. Дуговое расстояние между ушными отверстиями	2402	0,13	0,92	2,08	1089	0,09	0,86	3,31
16. Отношение поперечного диаметра к продольному	2385	0,14	0,81	2,43	1089	0,27	0,99	3,86
17. Плечевой диаметр	1701	0,008	0,62	4,00	1723	0,024	0,63	4,00
18. Тазовый диаметр	1698	0,07	0,98	3,53	1715	0,016	0,63	3,73
19. Обхват груди	1792	0,05	0,70	3,46	1716	0,002	0,40	3,96
20. Длина тела	2308	0,29	1,00	2,99	1723	0,77	0,96	2,44
21. Длина корпуса	1069	0,07	0,50	4,02	1463	0,25	0,95	2,73
22. Длина руки	2306	0,56	0,88	2,17	1461	0,08	0,99	2,67
23. Длина кисти	292	0,89	1,00	5,14	591	0,24	0,71	5,58
24. Длина ноги	2309	0,38	0,88	2,90	1463	0,02	0,83	3,55
25. Длина стопы	1351	0,73	1,00	2,44	719	0,46	1,00	4,59
26. Ширина стопы	1351	0,009	0,61	6,00	719	0,009	0,45	7,51
27. Вес тела	1751	0,00	0,01	5,83	1682	0,002	0,05	6,66
28. Удельный вес	171	0,67	0,98	9,36	—	—	—	—
29. Объем тела	171	0,23	1,00	10,53	—	—	—	—

по формуле нормальной кривой в тех случаях, когда статистические критерии отвергают принадлежность кривой к нормальному типу. Можно думать, что эта ошибка невелика. В самом деле, обратим внимание на графики кривых распределения ширины стопы и веса (рис. 27 и 28). Статистические критерии дают основание отвергнуть принадлежность этих распределений к нормальному типу. Но на рисунке вовсе не видно, что эмпирические кривые так сильно отличаются от теоретических и что применение нормального распределения приведет к серьезному просчету. Несомненно, что многие практические потребности, в частности, расчеты ассортимента размерных вариантов, вовсе не требуют такой степени соответствия, какая нужна для статистической оценки согласия между эмпирическими и теоретическими кривыми. Так, например, при большом числе наблюдений распределение может иметь статистически вполне реальную асимметрию или несомненное отклонение от нормальной вершинности. Но по абсолютной величине эти отклонения могут быть столь малы, что практическое их значение совершенно ничтожно.

§ 4. Мера погрешностей при построении стандартов

Для практических целей имеет значение абсолютная величина просчета, который получается при пользовании неточными или, как говорят, смещенными оценками. В нашем случае мера просчета или погрешности имеет очень отчетливое выражение. Она представляет собою относительную численность людей, неудовлетворенных размерами изделий в наборе, составленном на основании смещенных оценок. Для примера допустим, что в каком-нибудь коллективе распределение людей по росту представлено в первом столбце цифр предлагаемой табл. 3.

Таблица 3

Определение погрешности

Варианты роста	Действительное распределение	Предполагаемое	Расхождение
	в %		
Низкий	6	7	+1
Ниже среднего	26	24	—2
Средний	35	38	+3
Выше среднего	25	24	—1
Высокий	8	7	—1
Всего	100	100	+4% —4%

Согласно таблице, населению недостает 1% низкого роста и 3% среднего, что в сумме составляет 4% от общего итога. Такой же величине равен и избыток предполагаемого распределения над теоретическим. Поэтому несоответствие действительных и предполагаемых распределений (при условии, что общие численности того и другого одинаковы), имеет двойное проявление: недобор и равный ему излишек. При неправильно составленном наборе изделий окажется определенное число людей, неудовлетворенных размерами (в нашем примере их 4%), и такое же число изделий окажется излишним и не найдет спроса. Это число и служит мерой погрешности. Погрешность 4%, повидимому, можно принимать как терпимую.

Итак, погрешность (или просчет), выражающая относительную численность лиц, неудовлетворенных данным набором, определяется полусуммою абсолютных разностей между частотами тех же вариантов в действительном и предполагаемом распределениях; эта полусумма относится к общей численности и ниже обозначается знаком П[1].

Величина погрешности определена для каждого из 54 распределений и, выраженная в процентах, дается в табл. 2. Из табл. 2 можно видеть, что лишь в 8 случаях из 54 погрешность больше 5%; при этом, за исключением ширины стопы, более значительный просчет приходится на признаки, не являющиеся в настоящее время предметом стандартизации (объем тела, удельный вес, высота головы, длина уха). Приведенные в табл. 2 погрешности вызываются как отклонениями действительных распределений от нормального, так и неточностями оценок численностей отдельных вариантов, происходящими вследствие ограниченности выборки. Если выборка мала, то в силу случайных неповторимых обстоятельств выборочное распределение обычно довольно значительно расходится с распределением исчерпывающей или, как говорят, генеральной совокупности, из которой произведена выборка. В соответствии с законом больших чисел расхождение между выборочным и генеральным распределением уменьшается по мере увеличения объема выборки. Но в наших данных оно все же имеет место. Поэтому мы не должны упускать из вида, что погрешности, вследствие отклонений от нормального распределения, в действительности меньше, чем приведенные в табл. 2.

Впрочем, погрешность, зависящая от ограниченности выборки, не может быть предвидена; обычно она не имеет практического значения и устранима увеличением объема выборки. Поэтому мы исключим ее из нашего дальнейшего рассмотрения и ограничимся оценками погрешностей, вызываемых несоответствием форм кривых распределения.

Просчет, возникающий из-за несоответствия форм кривых распределения, является следствием наличия в распределении асимметрии и эксцесса. Поэтому естественно произвести сопоставление между нормальной кривой и кривой, учитывающей скошенность и отступление от нормальной вершинности. Для этой цели вычислено расхождение между двумя типами кривых, причем в качестве меры расхождения принята определенная выше величина погрешности

---

[1] Следовательно, $П = \frac{\Sigma\,|f(x)-f(\bar{x})|}{2\,\Sigma f(x)}$, где $f(x)$—действительные и $f(\bar{x})$ — вычисленные значения частот в интервале $x + \Delta x$. В таблицах величина П выражена в процентах.

(просчета) П в процентах. Ее значение в данном случае дается выведенной нами формулой

$$П = | 0{,}125\,\gamma_1 - 0{,}029\,\gamma_2 | \qquad (6)^1$$

причем γ_1 и γ_2 определены формулами (4) и (5). Воспользуемся данными упомянутых выше 54 распределений. Примем для каждого распределения полученные в выборке значения γ_1 и γ_2[2]. В результате составим таблицу 4, в которой приводятся значения γ_1, γ_2 и П[3]. Табл. 4 показывает, что величина П очень мала. Из 54 случаев она лишь в 7 больше 3% и только в одном (высота головы 1 у мужчин) достигает 7%. Эта цифра является резким исключением, которое, кстати сказать, в женской группе не повторяется. Но даже и ее вряд ли следует считать очень высокой. Поэтому можно думать, что между нормальной кривой и более сложными и трудными для вычисления и пользования асимметричными и эксцессивными кривыми различия очень невелики.

Изложенное дает основание для заключения, что рассмотренные распределения антропологических признаков с вполне достаточной для практических целей точностью выражаются формулой нормальной кривой и не нуждаются в осложнениях за счет асимметрии и эксцесса.

Сходство распределений различных признаков между собою следует принимать условно. Строго говоря, все они отличаются друг от друга неповторимыми особенностями, вызываемыми различиями формирования признаков и историческими условиями существования группы. Для глубокого анализа эти особенности наряду с различиями средних величин должны иметь первостепенное значение. Вообще говоря, ни одно из конкретных распределений не поддается простой математической формулировке. И лишь для целей антропологической стандартизации расхождение признаков между собою и с теоретической нормальной кривой оказывается не столь большим, чтобы следовало отказаться от технических удобств, которые предоставляет приближенное выражение их распределений формулой Ляпунова.

Подробное рассмотрение условий осуществления нормального распределения выходит за рамки настоящего изложения. Как уже указывалось, эти условия были вскрыты замечательными трудами ряда русских ученых, начиная с великого математика П. Л. Чебышева. С точки зрения обоснованного русскими математиками учения близкое к нормальному распределение антропологических признаков отображает сложность и многообразие условий, вызывающих их измен-

---

[1] $$П \approx \left| \frac{1}{12}\gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \overset{\mathrm{III}}{f}(x) \right| dx - \frac{1}{48}\gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \overset{\mathrm{IV}}{f}(x) \right| dx \right|,$$

где $f(x)$ — нормальная плотность вероятности; выводится из известного асимптотического разложения

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{6}\gamma_1 \overset{\mathrm{III}}{f}(x) + \frac{1}{24}\gamma_2 \overset{\mathrm{IV}}{f}(x) + \dots$$

[2] Допускаемая при этом статистическая погрешность оценок величин γ_1 и γ_2 столь мала, что ею вполне можно пренебречь.

[3] Приводимые в табл. 4 значения П не могут служить точной мерою уменьшения погрешности, получающейся за счет перехода от нормальной кривой к более сложной. Они показывают лишь расхождения между двумя теоретическими кривыми.

Таблица 4

Значение асимметрии (γ_1), эксцесса (γ_2) и погрешности (П) из-за неучета асимметрии и эксцесса

Признаки	Мужчины			Женщины		
	γ_1	γ_2	погрешность в % (П)	γ_1	γ_2	погрешность в % (П)
1. Окружность головы	0,018	0,390	0,90	0,077	0,076	0,74
2. Продольный диаметр головы	0,0	0,132	0,38	0,071	0,134	0,50
3. Поперечный диаметр головы	0,0	0,050	0,15	0,239	0,206	2,39
4. Высота лица	0,096	−0,070	1,40	0,219	0,104	2,44
5. Верхняя высота лица	0,053	0,0245	0,59	0,156	0,069	1,75
6. Высота нижней части лица	0,175	0,039	2,07	0,148	0,258	1,10
7. Высота головы I	−0,418	0,636	7,07	−0,076	−0,137	0,55
8. Высота головы II	−0,096	−0,018	1,15	−0,088	−0,077	0,88
9. Ширина межглазничная	0,187	0,119	1,99	0,156	0,492	0,52
10. Ширина скуловая	0,0	0,142	0,41	0,025	0,118	0,03
11. Ширина нижнечелюстная	0,136	0,251	0,97	0,152	0,356	0,87
12. Ширина носа	0,189	0,049	2,22	—	—	—
13. Обхват головы	−0,020	0,142	0,66	0,040	0,032	0,41
14. Длина уха	−0,044	−0,719	1,54	—	—	—
15. Дуговое расстояние между ушными отверстиями	0,051	0,110	0,32	0,103	0,139	0,88
16. Отношение поперечного диаметра к продольному	0,081	0,188	0,47	0,066	0,024	0,76
17. Плечевой диаметр	0,181	0,089	2,00	−0,127	0,239	2,28
18. Тазовый диаметр	0,151	0,224	1,24	0,091	0,497	0,30
19. Обхват груди	0,248	0,422	1,88	0,308	0,396	2,70
20. Длина тела	0,0	0,007	0,02	0,119	0,123	1,13
21. Длина корпуса	−0,100	0,698	3,27	0,062	0,225	0,12
22. Длина руки	−0,046	0,138	0,98	0,121	0,149	1,08
23. Длина кисти	0,037	0,368	0,60	0,280	−0,084	3,74
24. Длина ноги	0,041	0,204	0,08	0,233	0,284	2,09
25. Длина стопы	0,092	0,127	0,78	0,189	−0,109	2,68
26. Ширина стопы	0,008	−0,216	0,73	0,171	−0,025	2,21
27. Вес тела	0,304	0,098	3,52	0,477	0,424	4,73
28. Удельный вес	0,245	0,008	3,04	—	—	—
29. Объем тела	0,340	0,199	3,67	—	—	—

чивость даже в однородной по возрастному, половому, социальному и этническому составу группе; чем сложнее и многообразнее условия происхождения изменчивости, тем больше шансов на осуществление нормального „закона".

В свете этих исследований становится очевидной порочность как идеалистических представлений (Кетле, Иогансена и др.) о том, что будто бы нормальность распределения обусловлена стремлением средних к какому-то „типу", существующему независимо от наблюдений, так и эмпиризма английских биометриков (Гальтона, Пирсона), внесших много путаницы и извращений в учение о кривых распределения.

§ 5. Ограничения пользования формулой нормального распределения

Задачи антропологической стандартизации приобретают реальный смысл лишь в применении к конкретным группам населения. Но всякий раз, когда мы обращаемся к изучению человеческого общества, следует иметь в виду действие социальных факторов. Так, К. Маркс пишет: „Население это абстракция, если я, например, оставлю в стороне классы, из которых оно состоит"[1]. Развивая идею К. Маркса, В. И. Ленин указывает: „Условия размножения человека непосредственно зависят от устройства различных социальных организмов, и потому закон народонаселения надо изучать для каждого такого организма отдельно, а не „абстрактно", без отношения к исторически различным формам общественного устройства"[2].

Хотя условия размножения человека не являются предметом изучения антропологии, но, учитывая ведущую роль социальных факторов в развитии человеческих обществ, советские антропологи решительно отвергают свойственный буржуазным теоретикам подход к населению, как совокупности биологических единиц. Поэтому, составляя подлежащие изучению совокупности, советские антропологи стремятся достигнуть наибольшей однородности групп; они производят группировку материала не только по полу и возрасту, но и по национальности, месту происхождения и социальным признакам. Такой подход в известной степени способствует приближению распределения признаков к нормальности. Тем не менее переоценить роль нормального распределения столь же опасно, как и недооценить. Если в настоящее время нормальному распределению в статистике придается гораздо больше значения, чем в начале нашего века, то это не значит, что невозможны другого рода распределения. Так, советский математик, отмечая доминирующую роль закона нормального распределения, указывает, что он далеко не является единственным[3]. И действительно, в антропологической литературе можно найти указания на случаи распределения признаков по явно асимметричным кривым. Наглядные примеры мы найдем в работах М. Я. Кодес, относящихся к длине мышечных волокон человека и проведенных на многочисленном материале[4].

Возможно, что накопление данных по внутрительной изменчивости обнаружит еще и другие случаи асимметричных кривых. Правда, эти случаи представляют такой класс распределений, которые не имеют отношения к антропологической стандартизации и поэтому не являются предметом нашего рассмотрения, тем не менее подходить к нормальному распределению, как к неизбежному закону, было бы крайне опасно. Поэтому, прежде чем применять формулу нормального распределения, необходимо каждый раз устанавливать, насколько действительное распределение соответствует нормальному, и всегда считаться с возможностью исключений.

Отступление от этого правила может привести к значительным в практическом отношении ошибкам. Особенно важно иметь в виду, что коллектив потребителей изделий, предназначенных для личного пользования, не всегда соответствует обычным антропологическим совокупностям.

Опыт работ в этом направлении приводит к заключению, что из обстоятельств, отклоняющих распределения от нормального типа,

---

[1] К. Маркс. К критике политической экономии, Госполитиздат, 1949, стр. 212.

[2] В. И. Ленин. Экономическое содержание народничества. Соч., т. I, стр. 433.

[3] Хинчин А. Я. Предельные законы для суммы независимых случайных величин, М.—Л., 1938, стр. 55.

[4] Кодес М. Я. Площадь поперечного сечения мускульных волокон, ее изменчивость у взрослых и в период роста (рукопись).

наибольшее практическое значение имеют следующие два: 1) подбор группы населения, 2) суммирование двух и более распределений. Примером первого типа отклонений может служить комплектование кадров по какому-нибудь признаку физического развития. Так, если годными к воинской службе в какой-нибудь части признаются лишь лица, которые имеют рост не ниже определенного предела, то рост отобранных людей дает так называемое усеченное нормальное распределение (см. рис. 29).

Чтобы производить расчеты в случае усеченной нормальной совокупности, необходимо определять параметры полной совокупности по параметрам усеченной. Для такого перевода существуют несложные формулы и специальная таблица. Метод пользования ими заключается в следующем:

Пусть для усеченного распределения даны: начальное (или конечное) значение, равное x_0, его средняя, равная M', и среднее квадратическое отклонение — σ'. Если искомые средняя и среднее квадратическое отклонение полного распределения равны M и σ, то сначала находится вспомогательная величина Ψ_1 по формуле

$$\Psi_1 = \frac{\sigma'^2}{(x_0 - M')^2}.$$

Затем по табл. 21 (приложение 5) отыскиваются вспомогательные величины λ и Ψ_2 и найденные значения подставляются в формулы

$$\sigma = \Psi_2 \mid x_0 - M' \mid. \qquad (7)$$

$$M = x_0 + \lambda\sigma \text{ (если } x_0 < M) \qquad (8)$$

$$M = x_0 - \lambda\sigma \text{ (если } x_0 > M) \qquad (8')$$

Для примера образуем усеченное распределение из нормального, приведенного в табл. 1, отбросив варианты меньше 159,5 *см*. Получается ряд, представленный в табл. 5.

Таблица 5

Усеченное нормальное распределение

Интервалы в *см*	Численности
159,5—162,5	121
162,5—165,5	176
165,5—168,5	200
168,5—171,5	176
171,5—174,5	121
174,5—177,5	65
177,5—180,5	27
180,5—183,5	8
183,5—186,5	2
186,5—189,5	1

Произведя вычисления, найдем, что для этого распределения[1] средняя равна 168,21 *см*, среднее квадратическое отклонение равно 5,02 *см*. Требуется найти аналогичные параметры полного распределения. Другими словами, дано $x_0 = 159{,}5$; $M' = 168{,}21$; $\sigma' = 5{,}02$; отыскиваются M и σ.

Сначала находим величину $\Psi_1 = \frac{5{,}02^2}{(159{,}5 - 168{,}21)^2} = \frac{25{,}2004}{75{,}8641} = 0{,}332$.

Затем обращаемся к табл. 21 (приложение 5) и ищем во вторых столбцах $\Psi_1 = 0{,}332$; оно находится между 0,323 и 0,342. Произведя обычную интерполяцию, найдем, что для $\Psi_1 = 0{,}332$, $\lambda = 2{,}153$ и $\Psi_2 =$

[1] Для вычисления параметров применимы обычные упрощенные способы (см. приложение 1).

$=0{,}6866$. Подставив эти значения в формулу (7), получим искомое значение $\sigma = 0{,}6866 \cdot 8{,}71 = 5{,}98$ *см*.

Отсюда по формуле (8) находим

$$M = 159{,}5 + 1{,}253 \cdot 5{,}98 = 166{,}99 \text{ см.}$$

Получается почти точное совпадение с параметрами полного распределения:

$$M = 170 \text{ см}; \quad \sigma = 6 \text{ см.}$$

Если сечение производилось с правого края, то окажется, что

$$x_0 = 174{,}5; \qquad M' = 165{,}79 \text{ см.}$$

Остальные величины сохраняют те же значения, но для M пользуемся формулой (8')

$$M = 174{,}5 - 1{,}253 \cdot 5{,}98 = 167{,}01 \text{ см.}$$

Из изложенного можно заключить, что рассматриваемый случай отклонения от нормального распределения не вносит ничего принципиально нового и лишь приводит к легко преодолимому осложнению расчетов.

Второе особенно частое осложнение возникает в результате суммирования двух или более распределений с разными статистическими параметрами. Это происходит тогда, когда единая с точки зрения производящих и распределяющих организаций совокупность неоднородна в антропологическом отношении. Естественно, что массовое производство и снабжение имеют целью обслуживать население различных географических районов независимо от того, является ли оно в антропологическом отношении однородным или смешанным. Если, например, в какой-нибудь местности живут люди разных антропологических типов (русские и украинцы или русские и узбеки), то для построения размерного ассортимента важны не пропорции антропологических типов, а относительные численности потребных номеров одежды или обуви независимо от того, какие группы населения будут ими пользоваться; например, не имеет значения, будет ли какой-нибудь 42-й номер обуви носить русский или украинец или узбек. В других случаях при производстве изделий личного пользования не принимают во внимание даже половых различий. Например, хирургические перчатки изготовляются одинакового типа как для мужчин, так и для женщин, и лишь при расчетах ассортимента численности больших и малых номеров по каждому полу определяются отдельно. Сложение двух совокупностей, недопустимое для задач антропологических исследований, в условиях массового производства изделий личного пользования часто представляется вполне уместным.

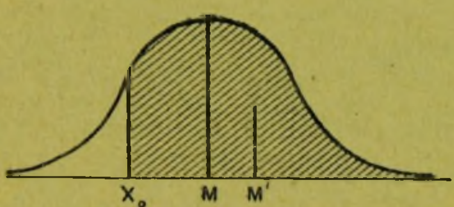


Рис. 29. Усеченное нормальное распределение

Сложение двух или более нормальных совокупностей может повлечь значительную деформацию кривых распределения. Нарушение нормальности распределения особенно отчетливо проявляется при объединении детей и подростков, образующих школьную группу, охватывающую возрасты от 7 до 17 лет. В эту группу входят примерно одинаково изготовляемые швейные изделия с 32-го по 50-й номер. Такая однородная с производственной точки зрения совокупность явно разнородна в антропологическом отношении. Распределения всех признаков в ней заметно отличаются от нормальных. Для примера приводим распределение длины тела (роста).

Таблица 6

Распределение длины тела (роста) детей и подростков школьного возраста мужского пола (Центральный промышленный район)

Рост (в *см*)	Относительные численности на 1000	Значения нормальной кривой
92— 98	—	2
98—104	—	6
104—110	4	14
110—116	28	29
116—122	80	54
122—128	124	87
128—134	122	120
134—140	114	145
140—146	120	·151
146—152	109	136
152—158	112	107
158—164	104	72
164—170	60	42
170—176	20	21
176—182	3	9
182—188	—	5

Табл. 6 и рис. 30 обнаруживают явную косость ряда, выражающуюся в том, что максимальная частота, приходящаяся на рост 126 *см*, не совпадает с серединою распределения (140 *см*), а значительно отстоит от нее. Кроме того, бросается в глаза волнистость и пологость вершины кривой. Отличие рассматриваемого ряда от нормального выступает на рисунке со всей наглядностью.

Отступление от нормальности распределения формально объясняется тем, что изменчивость возрастных групп велика по сравнению с изменчивостью внутри групп одного и того же возраста. Известно, что изменчивость признака в группе, составленной из нескольких совокупностей, имеющих разные средние (M), но одно и то же сред-

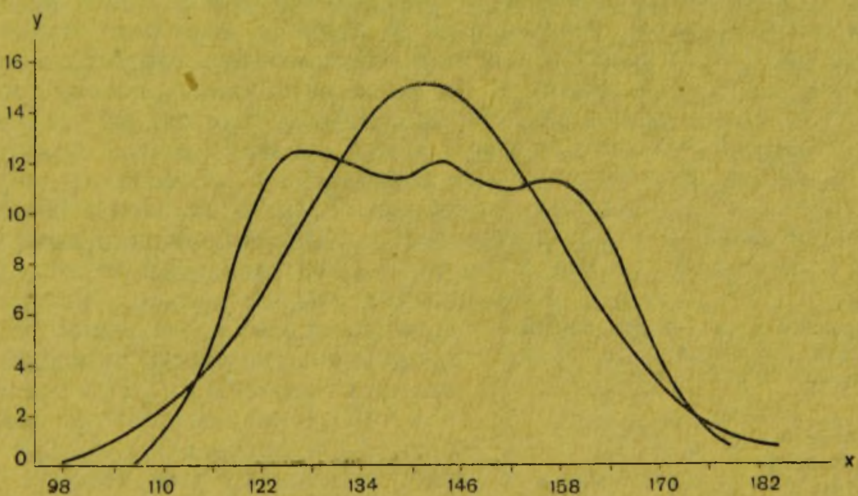


Рис. 30. Сложение нормальных распределений

нее квадратическое отклонение (σ), выражается суммой $\sigma^2+\sigma_M^2$. При этом, если изменчивость средних (σ_M) велика по сравнению с изменчивостью около средних или внутри группы (σ), то нормальность распределения нарушается.

Естественно, что большое практическое значение принимает вопрос о том, до какого предела терпимо различие средних. Для ответа на этот вопрос нами составлены таблицы, в которых дается величина погрешности (просчета) П, для ассортимента, если он рассчитан при помощи нормального распределения, в действительности же совокупность состоит из двух или нескольких нормальных распределений с разными средними, но одинаковыми средними квадратическими отклонениями.

Таблица 7

Погрешность (в %) при замене двух распределений с разными средними одним сводным

Разница между средними (в σ)	Погрешность (П)
0,25	0,01
0,50	0,08
0,75	0,15
1,00	0,54
1,50	2,28
2,00	5,47
2,50	9,95
3,00	14,97

Табл. 7 относится к распределениям, составленным из двух нормальных. Она показывает величину просчета в зависимости от разницы между средними. Из таблицы видно, что погрешность порядка 5% (которую в первом приближении мы считаем приемлемой) достигается лишь при весьма значительном расхождении средних, а именно, когда оно равно двум средним квадратическим отклонениям.

Поэтому во многих случаях соединение двух реально различных статистически и антропологически совокупностей не приводит к сколько-нибудь значительным отклонениям распределений от нормального вида. Это обстоятельство чрезвычайно расширяет область применения нормальных кривых и особенно наглядно показывает одну из причин их частой встречаемости. В самом деле, если, например, при исследовании какой-нибудь группы населения обнаружатся два антропологических типа, разница между которыми по длине тела в среднем составляет 10 *см*, по обхвату груди 6 *см* и тому подобное по другим размерам, то, несомненно, исследователь будет описывать и анализировать оба типа отдельно. Между тем пренебрежение фактором, создающим такие различия, практически не приводит к заметным отклонениям формы распределений от нормальной. Следовательно, видимые различия, если даже они отчетливо связываются с каким-нибудь фактором разнородности и изменчивости, производят значительно меньшее действие, чем требуется для нарушения нормальности. Это дает основание думать, что неучтенные, невидимые факторы разнородности и подавно не в состоянии нарушить тенденцию к нормальности, особенно если их число значительно.

Полученный вывод подтверждается данными, приводимыми ниже в табл. 8. Они относятся к кривым, образовавшимся в результате соединения нескольких нормальных совокупностей с разными средними и одинаковыми средними квадратическими отклонениями. При составлении табл. 8 принималось равномерное распределение средних (когда все они расположены на одинаковом расстоянии друг от друга). При таком условии сводное распределение получает форму, близкую к кривой, приведенной на рис. 30; разница будет состоять в том, что вершина нового распределения перейдет в строго пря-

Таблица 8

Погрешность (в %) при замене нескольких распределений с разными средними одним сводным[1]

Среднее квадратическое отклонение средних (в σ)	Погрешность (П)
0,5	0,29
1,0	2,65
1,5	6,36
2,0	9,43
2,5	11,68
3,0	13,30

[1] Число исходных распределений принималось равным семи.

мую линию, параллельную оси абсцисс. Поэтому приведенные числа, относясь к частному случаю, имеют лишь иллюстративное значение. В таблице дается погрешность в зависимости от среднего квадратического отклонения средних ($\sigma_м$), выраженного в сигмах исходных распределений (σ).

Из таблицы видно, что расхождение средних должно достичь значительных размеров, чтобы вызвать практически ощутимое отклонение сводного распределения от нормальной формы. Поэтому при составлении ассортимента и тому подобных задачах мы имеем все основания пренебрегать сравнительно малыми групповыми различиями. Так, например, пренебрежение различиями по обхвату груди между сельским и городским населением одних и тех же географических районов, составляющими примерно от 1 до 1,5 *см*, или от 0,25 σ до 0,375 σ, дает просчет менее 0,1%. Это, разумеется, не имеет никакого практического значения.

В качестве другого примера приведем различия между мужчинами и женщинами по обхвату (окружности) головы; в однородной антропологической группе они составляют около 2 *см*, что при среднем квадратическом отклонении примерно в 1,5 *см* равно 1,3 σ. Погрешность, получающаяся при пренебрежении этими различиями, составляет всего 2%, что тоже не представляет большого практического значения.

Но совершенно недопустимо выражение одной нормальной кривой совокупности ростов детей и подростков, объединенных в группу школьного возраста, как это представлено в табл. 6. В самом деле, в этом случае изменчивость ($\sigma_м$) средних отдельных возрастов составляет 14,1 *см*, при средней изменчивости внутри групп (σ) = 7,1 *см*, так что изменчивость средних оказывается вдвое больше изменчивости около средних. При равномерном распределении средних это дает отклонение от нормальной формы, выражающееся погрешностью 9,4%, действительная же погрешность немного больше, она равна 12%. Такой величиной просчета вряд ли допустимо пренебрегать.

В общем же можно считать, что, если изменчивость средних больше изменчивости около средних, т. е. если $\sigma_м > \sigma$, то применение нормального закона к сводному распределению недопустимо.

Неприменимость формулы нормального распределения к подобного рода сводным совокупностям сложного строения отнюдь не обозначает отказа от пользования ею. Она вносит лишь известные технические осложнения, так как делает необходимым разложение суммарного распределения на составные элементы, обычно выражаемые нормальной кривой. Например, приведенное выше распределение в табл. 6 можно представить в виде суммы или средней из пяти нормальных распределений для отдельных возрастных групп с параметрами и весами, приведенными в следующей таблице:

Таблица 9

Параметры распределений (M и σ) и веса (n) возрастных групп, входящих в сводное распределение длины тела детей школьного возраста

Возрасты в годах	Веса в % (n)	Параметры в *см*	
		M	σ
8—9	16	121	6,0
10—11	17	128	5,5
12—13	24	140	7,0
14—15	22	151	9,0
16—17	21	161	7,0

Мы наглядно видим, сколь велико различие средних; поэтому сложение пяти кривых и дало столь причудливое распределение, которое изображено на рис. 30.

В практике работ по антропологической стандартизации разложение сводных распределений на составные части обычно не требует применения каких-нибудь специальных математических приемов. Все дело сводится к недопущению сведения в одну группу распределений со значительными расхождениями средних.

Из других отклонений от нормальности следует упомянуть о наличии изолированных точек на концах распределений. Иногда в эмпирическом распределении находятся элементы, оторванные от основной группы, отличающиеся либо слишком большим, либо слишком малым размером. При обработке вариационного ряда выступающие элементы доставляют много хлопот. Но в вычислениях, связанных с антропологической стандартизацией, поскольку она предназначена для нужд массового производства, такие варианты бесспорно следует выключать. Соответствующие им изделия подлежат индивидуальному изготовлению, как нестандартные.

Наконец, не исключены нарушения нормальности распределения, производимые непредвидимыми и неповторимыми историческими условиями. Относительно них нельзя выставить никаких положений; можно лишь отметить, что на практике такого рода отклонения до сих пор не достигали величины, которая служила бы препятствием для антропологической стандартизации.

Общие выводы, вытекающие из рассмотрения вопроса о распределениях размерных антропологических признаков, заключаются в следующем.

В работах по антропологической стандартизации применительно к массовому производству изделий личного пользования необходимо в каждом отдельном случае проверять, насколько распределение соответствующих размерных признаков близко к нормальному. Многочисленные наблюдения обнаруживают, что основным типом распределений антропологических признаков является нормальный или сводимый к нормальному. Господствующее положение нормального распределения находит теоретическое объяснение: оно отображает сложность и многообразие условий, влияющих на изменчивость признаков.

Эти положения побуждают нас при решении задач антропологической стандартизации исходить из предпосылки нормального распределения. Такая предпосылка в дальнейшем и принимается, причем имеется в виду, что в случае необходимости можно внести поправки соответственно характеру отклонения наблюдаемых распределений от нормальной формы.

Глава II

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОЧЕТАНИЙ ПРИЗНАКОВ

§ 1. Нормальная корреляция

Для построения системы размерных стандартов существенное значение имеет не только распределение признаков, но и распределение их сочетаний; так, для системы стандартов одежды важно знать сочетания размеров груди с ростом, для системы стандартов обуви — сочетания длины и ширины стопы. Рациональное построение стандартов должно отобразить распределение сочетаний этих размеров среди населения, т. е. частоты различных пар значений признаков. Очевидно, что частоты сочетаний двух признаков должны зависеть как от распределения этих признаков, так и от степени статистической связи между ними. Поэтому вопрос о количественной оценке степени связи между признаками приобретает особое практическое значение.

Статистическая связь обнаруживается при помощи таблицы частот (распределения) двух признаков, называемой корреляционной таблицей или корреляционной решеткой. В качестве ее образца может послужить приводимая ниже таблица нормального распределения сочетаний роста и обхвата груди (см. табл. 10). Распределение, помещенное в табл. 10, называется нормальным, потому что в каждом ее строю, т. е. столбце и строке, общим названием которых является строй, распределение имеет нормальную форму.

Связь между признаками обнаруживается в таблице совершенно отчетливо даже без всяких вычислений: легко видеть, что с увеличением роста обхват груди тоже увеличивается. Например, при росте 155 *см* значения обхвата груди группируются, как около центра, вокруг значения 84 *см*; при росте 158 *см* — около 85 *см*; при росте 161 *см* — около 86 *см* и т. д. Распределения обхвата груди с каждым столбцом перемещаются вниз.

При этом отдельные значения обхвата груди при заданном росте располагаются около своих центральных значений теснее, чем в общем популяционном распределении; другими словами, размах изменчивости обхвата груди при данном росте меньше, чем размах изменчивости при различных значениях роста. Аналогично ведут себя и значения роста по отношению к величинам обхвата груди, причем их распределения с каждой строкой перемещаются слева направо. Все это наглядно свидетельствует о наличии статистической связи между признаками. Она заключается в том, что люди большого роста в среднем (и лишь в среднем, а не каждый раз) обладают относительно большим обхватом груди, и, наоборот, люди с большим обхватом груди в среднем обладают большим ростом. Такого рода связь носит название статистической или коррелятивной, в отличие от твердой или однозначной функциональной, когда каждому значению одной переменной соответствует только одно значение другой (какова, например, при постоянной скорости связь пройденного пути со временем).

Более полные и наглядные выводы мы получим, если выразим сделанные наблюдения в количественной форме, а именно вычислим для каждого строя средние и средние квадратические отклонения. Для того чтобы показать закономерности, свойственные строевым средним, нет необходимости приводить результаты вычислений по всем строям. Достаточно ограничиться лишь несколькими начальными, которые и приведены в табл. 11.

Таблица показывает не только то, что обхват груди с увеличением роста тоже увеличивается и что с увеличением обхвата груди увеличивается рост, но и что одинаковым приращениям роста соответствуют одинаковые приращения обхвата груди: каждый раз, когда рост увеличивается на 3 *см*, средний обхват груди увеличивается ровно на 1 *см*. В то же время, если грудь увеличивается на 2 *см*, средний рост увеличивается на $1^1/_2$ *см*. Такая форма связи называется прямолинейной, потому что графически изображается прямой линией, называемой регрессией (см. рис. 34, линии *AB* и *CD*).

Таблица 10

Нормальное распределение сочетаний роста и обхвата груди (корреляционная таблица)

Рост (в *см*) \ Обхват груди (в *см*)	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	102	Итого
146			1	1	1	1										4
149		1	3	4	6	4	3	1								22
152	1	3	7	14	19	19	14	7	3	1						88
155	1	4	14	32	53	62	53	32	14	4	1					270
158	1	6	19	53	103	143	143	103	53	19	6	1				650
161	1	4	19	62	143	236	278	236	143	62	19	4	1			1208
164		3	14	53	143	278	389	389	278	143	53	14	3			1760
167		1	7	32	103	236	389	460	389	236	103	32	7	1		1996
170			3	14	53	143	278	389	389	278	143	53	14	3		1760
173			1	4	19	62	143	236	278	236	143	62	19	4	1	1208
176				1	6	19	53	103	143	143	103	53	19	6	1	650
179					1	4	14	32	53	62	53	32	14	4	1	270
182						1	3	7	14	19	19	14	7	3	1	88
185								1	3	4	6	4	3	1		22
188										1	1	1	1			4
Итого	4	22	88	270	650	1208	1760	1996	1760	1208	650	270	88	22	4	10000

Таблица 11

Строевые средние обхвата груди (*а*) и роста (*б*)

а		*б*	
Рост (в *см*)	Средний обхват груди (в *см*)	Обхват груди (в *см*)	Средний рост (в *см*)
146	81,0	74	156,5
149	82,0	76	158,0
152	83,0	78	159,5
155	84,0	80	161,0

Прямолинейность связи является свойством нормальной корреляции.

Другое ее свойство обнаруживается при вычислении строевых средних квадратических отклонений. Они обозначаются буквой Σ и называются также условными или частными (парциальными) средними квадратическими отклонениями, в отличие от полных или популяционных, обозначаемых буквой σ. Если произвести вычисления, то обнаружится, что все условные средние квадратические отклонения роста равны между собою так же, как равны между собою условные отклонения обхвата груди. При этом условные средние квадратические отклонения меньше соответствующих полных. В нашем примере:

	Рост (в *см*)	Обхват груди (в *см*)
Σ	5,20	3,46
σ	6,00	4,00

Равноизменчивость строевых распределений является существенным свойством нормальной корреляции, она дает возможность построить меру статистической связи между переменными. В самом деле, очевидно, что чем теснее связь между признаками, тем значительнее сжатие строевой изменчивости; в пределе, при твердой зависимости, строевая изменчивость исчезает. Следовательно, размер сжатия строевой изменчивости является мерой статистической связи между переменными. При нормальной корреляции отношение каждой строевой сигмы к полной (как в вертикальных, так и горизонтальных строях) является постоянной величиной, равной $\kappa = \frac{\Sigma}{\sigma}$ и называемой коэффициентом алиенации. Так как $\Sigma < \sigma$, то коэффициент алиенации κ по абсолютной величине всегда меньше 1. По мере увеличения связи коэффициент κ уменьшается. В нашем примере $\kappa = \frac{5,2}{60} = \frac{3,46}{4,00} = 0,866$.

Однако коэффициент алиенации на практике мало употребителен. Для измерения тесноты статистической связи вместо него обычно употребляется другой параметр, который возрастает одновременно с увеличением тесноты связи. Он называется коэффициентом корреляции и обозначается буквою r. При нормальной корреляции

$$r = \pm\sqrt{1-\kappa^2} = \sqrt{1-\frac{\Sigma^2}{\sigma^2}}. \qquad (9)$$

Абсолютная величина коэффициента корреляции меньше 1, но чем ближе он к 1, тем связь теснее. При $r = 1$ связь становится твердой, тогда как при $r=0$ она исчезает. Знак $+$ ставится при прямой связи (т. е. при одновременном возрастании или убывании обоих признаков) и минус — при обратной. В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с положительными коэффициентами корреляции. В нашем примере

$$r=\sqrt{1-\kappa^2}=\sqrt{1-0{,}866^2}=0{,}50.$$

В результате алгебраических преобразований выражения (9) можно получить формулу, применяемую для определения величины коэффициента корреляции, а именно:

$$r=\frac{\Sigma\,(x-M_x)\,(y-M_y)}{N\,\sigma_x\,\sigma_y}.$$

В приложении (1) дается простой способ вычисления этой величины.

При помощи коэффициента корреляции выражаются как формула зависимости одной переменной от другой, так и частота сочетаний двух переменных.

а) Зависимость одной переменной от другой, изображаемая, как было показано, прямой линией, дается формулой

$$y-M_y=r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,(x-M_x).$$

Так, если за независимое переменное принять x — рост, то для определения величины обхвата груди по росту служит формула

$$y-88=0{,}5\cdot\frac{4}{6}(x-167),$$

откуда $y=32{,}33+0{,}3333\,x$.

Если же независимое переменное принять y — обхват груди, то уравнение связи будет иметь вид

$$x-M_x=r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\,(y-M_y).$$

Подставив соответствующие значения и произведя действия, получим $x=101+0{,}75y$. Эти уравнения называются уравнениями регрессии y-а по x и x-а по y (см. рис. 34, линии CD и AB).

б) Чтобы составить представление о зависимости частоты сочетания от значений переменных, обратимся снова к корреляционной таблице. Мы увидим, что чаще всего встречается сочетание средних размеров. Его частота (в принятых интервалах) составляет 460 на 10 000. Она находится в центре таблицы; чем дальше от центра, тем частоты меньше. Кроме того, мы увидим, что существуют сочетания, имеющие одинаковые частоты. Таковы, например, следующие шесть сочетаний, каждое из которых встречается 62 раза:

Рост в *см*	155	161	161	173	173	179
Грудь в *см*	84	80	92	84	96	92

Однако с такою же частотой встречаются не только эти шесть сочетаний, но и множество других, не вмещающихся в принятых границах интервалов. Если, не меняя ширины интервалов, принять для них другие границы, то столь же вероятные сочетания можно будет получить в каждом строю. Например, можно рассчитать, что при росте в 158 *см* частоты 62 придутся на обхваты груди 80,4 *см* и 89,6 *см* (при том же интервале 2 *см*); при росте 164 *см* на обхваты 80,3 *см* и 93,7 *см* и т. д. Эта совокупность „равновероятных“ значений может быть представлена в табличной формуле, причем аргументом (x-ом) в ней является рост.

Таблица 12

Равновероятные сочетания роста (x) и обхвата груди (y) в *см*

x	155	158	158	161	161	164	164	167
y	84	80,4	89,6	80	92	80,3	93,7	81,1
x	167	170	170	173	173	176	176	179
	94,9	82,3	95,7	84	96	86,4	95,6	92

Такую же таблицу можно составить, беря в качестве аргумента обхват груди, но в этом нет необходимости.

обхват груди (см) / рост (см)	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	итог
149			1	1	1									3
152		1	1	2	2	1	1							8
155	1	1	3	5	6	5	3	1	1					26
158	1	2	5	10	14	14	10	5	2	1				64
161	1	2	6	14	24	29	24	14	6	2	1			123
164		1	5	14	29	39	39	29	14	5	1			176
167		1	3	10	24	39	46	39	24	10	3	1		200
170			1	5	14	29	39	39	29	14	5	1		176
173			1	2	6	14	24	29	24	14	6	2	1	123
176				1	2	5	10	14	14	10	5	2	1	64
179					1	1	3	5	6	5	3	1	1	26
182							1	1	2	2	1	1		8
185									1	1	1			3
итог	3	8	26	64	123	176	200	176	123	64	26	8	3	1000

Рис. 31. Корреляционные эллипсы

Если приведенные в табл. 12 точки нанести на корреляционную таблицу и соединить их плавной линией, то получится замкнутая кривая, называемая эллипсом (см. рис. 31); уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-167)^2}{36} - \frac{(x-167)(y-88)}{24} + \frac{(y-88)^2}{16} = 3. \qquad (10)$$

Легко проверить, что все пары значений x и y табл. 12 удовлетворяют этому уравнению. Очевидно, что кроме приведенных в табл. 12 сочетаний существует множество других, обладающих тем же свойством. Образуемый ими так называемый эллипс равных вероятностей определяется относительным числом сочетаний, находящихся внутри эллипса. Возвращаясь к рис. 31, можно подсчитать, что численность клеток внутри эллипса примерно 850 на тысячу, и лишь 15% сочетаний лежат за пределами эллипса[1].

В общем виде такой эллипс выражается формулой:

$$\frac{(x-M_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-M_x)(y-M_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-M_y)^2}{\sigma_y^2} = c^2. \qquad (11)$$

Величина c^2 служит сводной характеристикой тех пар значений, которые встречаются с одной и той же частотой. Эта частота находится по формуле

$$P(c) \approx \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{c^2}{2(1-r)^2}} \Delta x \Delta y \qquad (12)$$

при малых интервалах переменных Δx и Δy. Но если найдена частота величины c, то значит, что найдена и частота сочетаний любых значений x и y. Достаточно вместо c подставить его выражение (11), и получится формула относительной численности пар значений x и y, расположенных в центрах представляемых ими интервалов Δx и Δy (или в интервалах $x - \frac{1}{2}\Delta x$, $x + \frac{1}{2}\Delta x$ и $y - \frac{1}{2}\Delta y$, $y + \frac{1}{2}\Delta y$), в виде:

$$z\Delta x\Delta y = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-M_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-M_x)(y-M_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-M_y)^2}{\sigma_y^2}\right]} \Delta x\Delta y. \qquad (13)$$

При переходе от одного признака к двум геометрический образ распределения переходит от кривой к поверхности. Построение поверхности нормального распределения можно представить следующим образом: примем табл. 10 за основание геометрической фигуры; из каждой клеточки таблицы восстановим перпендикулярные отрезки с высотами, пропорциональными обозначенным в клеточках численностям. Покрывающая эти отрезки поверхность и будет поверхностью нормального распределения. На рис. 32 дается ее изображение[2].

Если на плоскости основания провести прямую $x = a$, где a—любое число, т. е. прямую параллельную оси y, находящуюся от нее на расстоянии a, и произвести вертикальное сечение, проходящее по этой линии, то в сечении получится нормальная кривая, как это изображено на рис. 33.

Такую же нормальную кривую дает сечение поверхности плоскостью $y = b$. Все эти параллельные осям координат вертикальные сечения представляют собою не что иное, как строевые распределения.

---

[1] Для этих точек стоящий в правой части уравнения (10) параметр больше трех.

[2] На рисунке за центр системы координат x и y приняты средние арифметические, вследствие чего $M_x = M_y = 0$.

Горизонтальные сечения поверхности распределения плоскостями $z = P$, проведенными на той или иной высоте над плоскостью основания, образуют эллипсы. Они называются корреляционными эллипсами или геометрическим образом множества пар значений признаков, имеющих одну и ту же частоту. Представление о том, как проходят корреляционные эллипсы, дает также точечная диаграмма распреде-

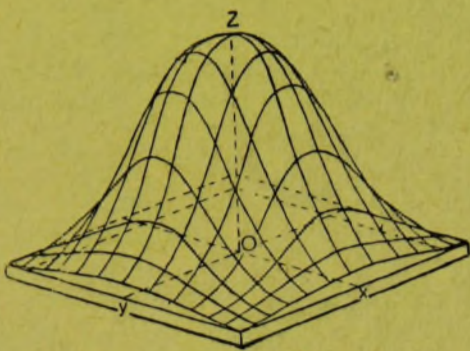


Рис. 32. Нормальная корреляционная поверхность

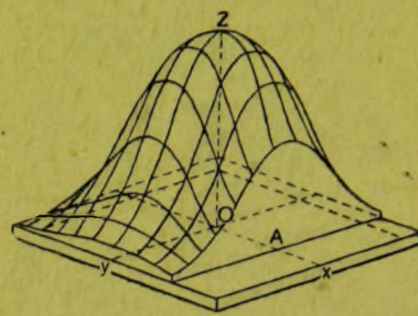


Рис. 33. Усеченная нормальная корреляционная поверхность

ления пар значений, приводимая на рис. 34. Для ее построения снова обратимся к рис. 31, заменив в нем числа соответствующим количеством точек. Получается так называемое корреляционное поле. На поле наложены эллипсы, являющиеся проекциями горизонтальных сечений поверхности распределения. Каждый эллипс вмещает

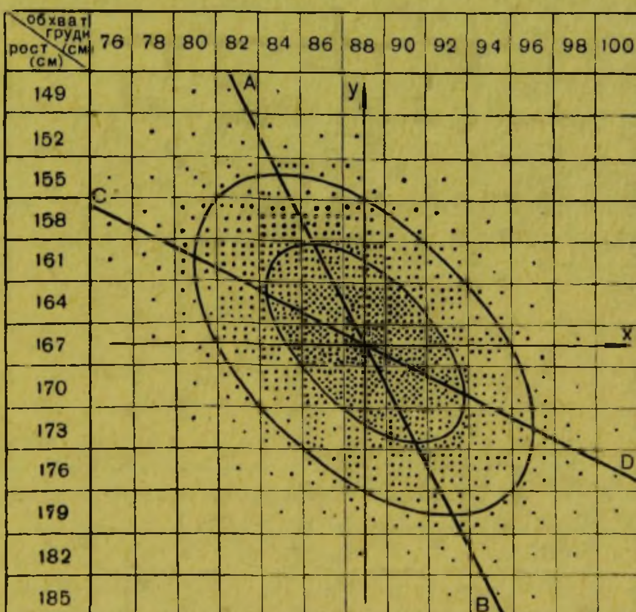


Рис. 34. Корреляционное поле

внутри себя определенное количество точек. Например, внутренний эллипс включает половину всех точек. Следовательно, корреляционные эллипсы дают представление о том, сколько раз встречаются сочетания величин, заключенных в определенных пределах. Очевидно, что число точек внутри эллипса определяется его размером, а размер—высотою плоскости сечения или значением величины z. При заданном значении величины z показатель степени в формуле (12) становится постоянным. Обычно он обозначается через $-\frac{\chi^2}{2}$, так что

$$\chi^2 = \frac{1}{1-r^2}\left[\frac{(x-M_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-M_x)(y-M_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-M_y)^2}{\sigma_y^2}\right] = \frac{1}{1-r^2}c^2. \quad (14)$$

Формула (14) является уравнением корреляционного эллипса $E\chi^2$. Вычислено, что для эллипса, вмещающего $^1/_2$ общего числа точек, т. е. пар значений x и y, $\chi^2 = 1{,}3863$, и уравнение эллипса $E_{1,3863}$ при $r = {}^1/_2$, как для данных табл. 10, получает вид:

$$\frac{4}{3}\left[\frac{(x-167)^2}{36} - \frac{(x-167)(y-88)}{24} + \frac{(y-88)^2}{16}\right] = 1{,}3863$$

или

$$4(x-167)^2 - 6(x-167)(y-88) + 9(y-88)^2 = 149{,}7204.$$

По этому уравнению можно определить любое число значений эллипса. Некоторые из них даются в табл. 13.

Таблица 13

Точки эллипса $E_{1,3863}$

x	161	161	164	164	167	167	170	170	173	173
y	83,85	88,15	83,31	90,69	83,92	92,08	85,31	92,69	87,85	92,15

Нанеся эти точки на точечное поле рис. 34, получим изображение эллипса (внутреннего). Можно проверить, что относительное число точек, лежащих внутри эллипса, равно как раз $^1/_2$. Соответствующим же образом проведен полученный выше эллипс (10), внутри которого лежит примерно 0,85 (точнее, 0,865) всего числа точек.

В общем виде относительная численность точек, лежащих внутри эллипса параметра χ^2, равна

$$P(\chi^2) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\chi^2}. \quad (15)$$

Эта формула выражает зависимость накопления частот сочетаний двух признаков от возрастания совокупного значения их величин. Ее применение дает возможность сделать ряд существенных выводов относительно закономерностей роста удовлетворенности населения размерами изделий при увеличении предлагаемых размерных вариантов.

Формула относительной численности сочетаний при нормальном распределении, приведенная под номером (13), для удобства вычислений и дальнейшего изложения несколько видоизменяется.

Во-первых, мы будем брать нормированные значения признаков, во-вторых, выразим интервалы в сигмах (такие интервалы будем называть нормированными), в-третьих, нормированные значения признаков будем обозначать одной и той же буквою x с подписными значками x_1 и x_2, так как в дальнейшем потребуется введение x_3, x_4

и т. д. Наконец, в-четвертых, вместо $z\Delta x\Delta y$ мы будем применять символ $P(x_1, x_2)$ и вместо $\Delta x\Delta y - \Delta_1\Delta_2$ $\left(\text{так что } \Delta_1 = \frac{\Delta x}{\sigma_x} \text{ и } \Delta_2 = \frac{\Delta y}{\sigma_y}\right)$.
Тогда формула частоты сочетаний $x_1\,x_2$ примет вид:

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x_1^2 - 2r\,x_1\,x_2 + x_2^2)}\,\Delta_1\Delta_2. \quad (16)$$

Мы будем пользоваться этим выражением.

§ 2. Применение нормальной корреляции при антропологической стандартизации

Из изложенного вытекает, что при нормальном распределении сочетаний признаков вполне возможно сравнительно простым способом решать важнейшие задачи антропологической стандартизации, а именно—определять среднее значение одного признака по заданному значению другого и находить ожидаемые численности тех или иных сочетаний признаков. Решение этих задач в случае невозможности привести распределение сочетаний признаков к нормальному виду очень сильно осложняется; как общее правило, связь между признаками выражается тогда какой-нибудь сложной кривой линией, строи могут потерять равноизменчивость, коэффициент корреляции лишается значения меры связи, наконец, формула поверхности распределения при криволинейной связи настолько осложняется, что ее применение потребует труда во много раз большего, чем при нормальной корреляции. Свойства нормальной корреляции хорошо исследованы, а связанные с нею вычисления упрощаются наличием вспомогательных таблиц. Поэтому весьма существенно установить форму корреляции между антропологическими признаками.

Как теоретические соображения, так и многочисленные наблюдения приводят к выводу, что корреляции между антропологическими признаками с достаточной для практических целей точностью вполне можно считать нормальными. В самом деле, условием нормальности корреляции является нормальность строевых распределений. Но строевое распределение антропологического признака, например, обхвата груди при заданном росте, можно рассматривать как распределение с уменьшенной изменчивостью, причем уменьшение изменчивости происходит за счет исключения влияния роста, тогда как другие факторы (не связанные с ростом) остаются в действии. Поэтому условная изменчивость обхвата груди подобна полной изменчивости в группе людей, мало отличающихся друг от друга по росту. О природе изменчивости обхвата груди в этой совокупности можно повторить все, что было сказано о полной изменчивости, лишь бы строевая изменчивость была непрерывной. Нет теоретических оснований думать о каких-то особых законах распределения обхвата груди у людей сравнительно большого или малого роста. То же можно сказать и применительно к другим условным распределениям. Если всякое распределение признака, кроме нормального, требует для своего осуществления особых условий, то это же следует принять и для распределения сочетаний признаков. Поэтому мы вправе предполагать нормальность корреляции между антропологическими признаками, во всяком случае при первом приближении, достаточном для наших практических целей.

Многочисленные наблюдения показывают, что, действительно, нормальная корреляция хорошо передает распределение пар антропологических признаков. Оказывается даже затруднительным подобрать пример криволинейной корреляции. Правда, на практике чаще всего приходится ограничиваться наиболее простыми (и недостаточно строгими) критериями нормальности — формой регрессии и формой итоговых распределений. Более строгие критерии требуют больших вычислительных усилий. Но, ввиду важности вопроса, представляется весьма целесообразным произвести такого рода испытания. В некоторых случаях они были произведены в Институте антропологии, причем применены критерии: 1) нормальность итоговых распределений, 2) соотношения между высшими моментами при нормальной корреляции[1]. Испытанию подвергались три корреляции: 1) между ростом и весом, что имеет значение ввиду высказызавшихся соображений о возможности криволинейной связи между этими признаками; 2) между ростом и обхватом груди — ввиду важности этой корреляции для изделий швейной промышленности и 3) между вертикальным обхватом головы и дуговым размером через лоб.

Подробности расчетов приводятся в приложении 2.

Результаты не оставляют никаких сомнений в нормальности испытанных корреляций. Нормальность корреляции между размерами стопы также доказана на обширном материале (Ю. П. Зыбиным).

Выводы, полученные относительно законов распределения пар антропологических признаков, очевидно, распространимы на сочетания трех и более признаков. Распределения сочетаний нескольких признаков образуют так называемые гиперповерхности и нет никаких указаний не считать их нормальными.

Это дает основание применять формулы нормальной корреляции ко всем расчетам, связанным с определением подчиненных размеров по главным, с определением ожидаемых численностей изделий, отличающихся друг от друга несколькими размерами, и к другим задачам антропологической стандартизации.

Практика работ Института антропологии вполне доказала правильность этих положений.

Более подробные сведения о нормальной множественной корреляции приводятся в приложении 3.

Приложение 1

Вычисление статистических параметров

Существует несколько способов упрощенного определения статистических параметров. Одним из наиболее употребительных приемов вычисления средней арифметической, среднего квадратического отклонения и коэффициента корреляции является способ моментов, применяющийся при достаточно большом (около сотни или более) числе наблюдений. Под моментами подразумеваются средние из различных степеней отклонений ряда величин от какого-нибудь числа,

[1] По поводу этих критериев см. Романовский В. И., Математическая статистика, М.—Л., 1938, стр. 385 и сл.

называемого началом. Пусть, например, дан ряд чисел: 1, 2, 2 и 3. Примем за начало 0; тогда отклонения первой степени будут +1, +2, +2, +3; отклонения второй степени — 1, 4, 4, 9; первый момент около нуля равен $(1+2+2+3):4=2$; второй момент $(1+4+4+ +9):4=4{,}5$ и т д., впрочем, более высокие моменты при вычислении упомянутых выше параметров не потребуются. Для моментов от любого начала приняты изображения: ν_1 и ν_2 (значок указывает степень момента). Если числа ряда 1, 2, 2, 3 обозначить через x, то для моментов от произвольного начала, которые обозначим через A, получатся формулы:

Моменты от произвольного начала А

$$\nu_1=\frac{\Sigma\,(x-A)}{N},\qquad \nu_2=\frac{\Sigma\,(x-A)^2}{N},\tag{1}$$

где N — число членов ряда, Σ — знак суммирования. Кроме этих двух моментов нам потребуется еще момент произведения. Он получается из произведения пар каким-нибудь способом сопряженных величин. Пусть, например, даны два ряда чисел (x-ов) и (y-ов)

I ряд $x=1,\ 2,\ 2,\ 3,$

II ряд $y=3,\ 3,\ 4,\ 5.$

Допустим, что числа 1 и 3 (по вертикали) обозначают измерения двух признаков у первого субъекта, числа 2 и 3—у второго и т. д. Если за начало первого ряда примем 0, а за начало второго 1, то получатся такие пары отклонений:

I ряд (x) 1, 2, 2, 3,

II ряд (y) 2, 2, 3, 4.

Среднее произведение отклонений этих чисел от принятых начал ($A_x=0$ и $A_y=1$) равно $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4}{4}=6.$

Это будет момент произведения от произвольных начал (0 и 1), обозначаемый через ν_{11},

$$\nu_{11}=\frac{\Sigma\,(x-A_x)\,(y-A_y)}{N}.$$

Если начало моментов равно средней арифметической, то они называются центральными и обозначаются буквой μ:

$$\mu_{1x}=\frac{\Sigma\,(x-M_x)}{N};\qquad \mu_{2x}=\frac{\Sigma\,(x-M_x)^2}{N};\qquad \mu_{1y}=\frac{\Sigma\,(y-M_y)}{N};$$

$$\mu_{2y}=\frac{\Sigma\,(y-M_y)^2}{N};\qquad \mu_{11}=\frac{\Sigma\,(x-M_x)\,(y-M_y)}{N}.$$

Первый центральный момент равен 0; второй центральный момент есть не что иное, как квадрат среднего квадратического отклонения:

$$\mu_1=0;\qquad \mu_2=\sigma^2.$$

Центральный момент произведения называется соизменчивостью (ковариацией). Он входит в формулу коэффициента корреляции r, а именно:

$$r=\frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{2x}\,\mu_{2y}}}=\frac{\mu_{11}}{\sigma_x\,\sigma_y}.$$

Метод моментов для отыскания статистических параметров заключается в том, что сперва вычисляются моменты от какого-нибудь произвольного начала, причем оно выбирается так, чтобы вычисление было возможно проще, а затем в полученные результаты вносятся поправки за счет разницы между рабочим началом и средней арифметической. Для этого применяются следующие формулы:

$$M = A + \nu_1, \tag{2}$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\nu_2 - \nu_1^2}, \tag{3}$$

$$r = \frac{\nu_{11} - \nu_{1x}\,\nu_{1y}}{\sigma_x\,\sigma_y}. \tag{4}$$

Если значения признака разбиты на классы интервалами шириною d единиц, то за рабочую единицу измерения удобно принимать ширину интервала; в таком случае после вычисления моментов надлежит вносить поправки еще и на величину интервала, и тогда вместо формул (2) и (3) получатся такие:

$$M = A + \nu_1 d, \tag{2'}$$

$$\sigma = \sqrt{\nu_2 - \nu_1^2}\; d. \tag{3'}$$

Значения же формулы (4) (коэффициента корреляции) не зависят от интервалов, поэтому ее элементы обычно берутся в рабочих единицах.

Примеры вычислений приводятся ниже.

1. Вычисление средней арифметической (M) и среднего квадратического отклонения (σ)

Вычисление показано в табл. 14. В ее первом столбце приведен ряд значений x длины тела горьковских крестьян в возрасте 25—44 лет (данные Института антропологии); во втором — частоты P_x; в третьем — отклонения от рабочей средней в рабочих единицах, причем в качестве такой средней принято $A = 164{,}5$, как значение одного из наиболее многочисленных интервалов (что ведет к уменьшению вычислений); рабочие же единицы равны 2 *см*, т. е. ширине интервала. В четвертом и пятом столбцах приводятся результаты указанных в заголовках действий.

Суммирование 2, 4 и 5-го столбцов дает итоги или элементы формул, а именно:

$$\Sigma P_x = N = 1063,\quad \Sigma P_x \alpha_x = 991,\quad \Sigma P_x \alpha_x^2 = 9579.$$

$$\text{Отсюда } \nu_{1x} = \frac{991}{1063} = 0{,}9323;\qquad \nu_{2x} = \frac{9579}{1063} = 9{,}0113.$$

Поэтому по формулам (2') и (3')

$$M_x = 164{,}5 + 0{,}93 \cdot 2 = 166{,}36 \text{ см},$$
$$\sigma_x = \sqrt{9{,}0113 - 0{,}8692} \cdot 2 = 2{,}85 \cdot 2 = 5{,}70 \text{ см}.$$

Таблица 14

Вычисление средней арифметической и среднего квадратического отклонения

X (см)	P_x	α_x	$P_x\ \alpha_x$	$P_x\ \alpha_x^2$
1	2	3	4	5
147,5—149,4	4	—8	— 32	256
149,5—151,4	6	—7	— 42	294
151,5—153,4	13	—6	— 78	468
153,5—155,4	13	—5	— 65	325
155,5—157,4	33	—4	—132	528
157,5—159,4	45	—3	—135	405
159,5—161,4	67	—2	—134	268
161,5—163,4	138	—1	—138	138
163,5—165,4	137	0	0	0
165,5—167,4	158	1	158	158
167,5—169,4	153	2	306	612
169,5—171,4	105	3	315	945
171,5—173,4	81	4	324	1296
173,5—175,4	52	5	260	1300
175,5—177,4	33	6	198	1188
177,5—179,4	18	7	126	882
179,5—181,4	3	8	24	192
181,4—183,4	4	9	36	324
Суммы	1063	—	991	9579

2. Вычисление коэффициента корреляции

а) Первый способ

Вычисление коэффициента корреляции, согласно формуле (4), кроме двух первых моментов, требует еще нахождения момента произведения ν_{11}. Способ его вычисления вытекает из определения. Для иллюстрации приводим вычисление коэффициента корреляции на бланке Института антропологии (см. табл. 15); на нем воспроизведена корреляционная решетка длины тела (x) и обхвата груди (y). Техника составления таких таблиц не нуждается в объяснении, хотя ее освоение требует упражнений. В качестве рабочих начал приняты: для роста $A_x = 164{,}5$, для обхвата груди $A_y = 87{,}5$. Итоги обозначены графами P_x и P_y. Кроме того, к таблице приписываются столбцы α_x, $P\alpha_x$, $P\alpha^2{}_x$, $P\alpha_y$ и $P\alpha_x\alpha_y$ и подписываются аналогичные строки α_y, $P\alpha_y$, $P\alpha^2{}_y$, $P\alpha_x$ и $P\alpha_x\alpha_y$. В этих обозначениях для простоты опущены подписные знаки под P; вместо $P_x\alpha_x$ пишется $P\alpha_x$ и т. д. Из приписанных столбцов и строк первые три служат для вычисления первого и второго моментов, как изложено в первом примере [1]. Значения $P\alpha_y$[2] представляют собою суммы произведений значений α_y на численности клеток, расположенных на пересечении столбцов α_y со строкой α_x. Например, значение $P\alpha_y$ в первой строке, равное 16, представляет собою следующую алгебраическую сумму произведений:

[1] Вычисление средних и средних квадратических отклонений также предусмотрено на бланке.

[2] Во втором столбце справа.

—7 · 1 (первое α_y, умноженное на численность первой левой клеточки первой строки) + — 6 · 1 (второе α_y, умноженное на численность второй клеточки той же строки) + — 4 · 1 + 1 · 1 или —7 — 6 — 4 + + 1 = — 16.

Значение $P\alpha_y$ второй строки представляет собою сумму произведений:

$$(-4) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 4 = -15.$$

В третьей строке имеем:

$$(-6) \cdot 1 + (-5) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + (-3) \cdot 6 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -38 \text{ и т. д.}$$

Аналогично вычисляются значения $P\alpha_x$ [1], но только строки и столбцы меняются ролями. Так, значение первого столбца $P\alpha_x$ (внизу), равное — 8, есть просто произведение $\alpha_x = -8$ на 1 (численность соответствующей клетки); значение $P\alpha_x$ второго столбца равно

$$(-8) \cdot 1 + (-6) \cdot 1 + (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -16.$$

Третье значение $P\alpha_x$ равно

$$(-6) \cdot 1 + (-5) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -19$$

и т. д.

Наконец, последние столбцы и строки $P\alpha_x\alpha_y$ дают произведение столбцов $P\alpha_y$ на α_x и строк $P\alpha_x$ на α_y, а именно в столбцах получается:

α_x	$P\alpha_y$	$P\alpha_x\alpha_y$
—8 ·	—16 =	128
—7 ·	—15 =	105
—6 ·	—38 =	228

и т. д.

В строках:

α_y	$P\alpha_x$	$P\alpha_x\alpha_y$
—7 ·	— 8 =	56
—6 ·	—16 =	96
—5 ·	—19 =	95

и т. д.

Суммы столбцов $P\alpha_x\alpha_y$ и $P\alpha_x\alpha_y$ должны совпадать. Они дают 2737 [2].

Таким образом, найдены следующие элементы:

$$\Sigma P_x = \Sigma P_y = N = 1063, \ \Sigma P\alpha_x = 991, \ \Sigma P\alpha^2_x = 9579,$$

$$\Sigma P\alpha_y = -122, \ \Sigma P\alpha^2_y = 4348, \ \Sigma P\alpha_x\alpha_y = 2737.$$

Теперь остается подставить эти элементы в формулы (1), (2'), (3') и (4), что дает

$$\nu_{1x} = {}^{991}/_{1063} = 0{,}9323; \quad \nu_{2x} = {}^{9579}/_{1063} = 9{,}0113; \quad \nu_{1y} = -{}^{122}/_{1063} = -0{,}1148;$$

$$\nu_{2y} = {}^{4348}/_{1063} = 4{,}0903; \quad \nu_{11} = {}^{2737}/_{1063} = 2{,}5748.$$

Отсюда

$$M_x = 166{,}36 \text{ см}; \ \sigma_x = 5{,}70 \text{ см}; \ M_y = 87{,}27 \text{ см}; \ \sigma_y = 4{,}04 \text{ см}.$$

---

[1] Во второй строке снизу.

[2] Кроме того, совпадают суммы $P\alpha_x$, взятые по вертикали и по горизонтали (они равны 991); то же относится к суммам $P\alpha_y$ (они равны —122).

Вычисление коэффициента корреляции между длиною тела (ростом) (x) и обхватом груди (y)

x \ y	Кл. сред. (x)	72,5—74,4	74,5—76,4	76,5—78,4	78,5—80,4	80,5—82,4	82,5—84,4	84,5—86,4	86,5—88,4	88,5—90,4	90,5—92,4	92,5—94,4	94,5—96,4	96,5—98,4	98,5—100,4	100,5—102,4		P_x	a_x	P_{a_x}	$P_{a_x}^2$	P_{a_y}	$P_{a_x a_y}$
Кл. сред. (y)		73,5	75,5	77,5	79,5	81,5	83,5	85,5	87,5	89,5	91,5	93,5	95,5	97,5	99,5	101,5							
147,5—149,4	148,5	1	1		1					1								4	—8	—32	256	—16	128
149,5—151,4	150,5				1	1	4											6	—7	—42	294	—15	105
151,5—153,4	152,5		1	1	2	6	1		1	1								13	—6	—78	468	—38	228
153,5—155,4	154,5			1		5	2	2	1		2							13	—5	—65	325	—22	110
155,5—157,4	156,5		1	2	3	6	7	4	4	4	1				1			33	—4	—132	528	—52	208
157,5—159,4	158,5				5	7	12	7	10	3	1							45	—3	—135	405	—67	201
159,5—161,4	160,5				3	11	14	13	14	8	3	1						67	—2	—134	268	—69	138
161,5—163,4	162,5			1	2	14	35	24	27	21	10	3	1					138	—1	—138	138	—95	95
163,5—165,4	164,5				4	14	24	27	29	21	14	2	2					137	0			—70	
165,5—167,4	166,5			1	2	12	19	32	31	28	25	6	1		1			158	1	158	158	—13	—13
167,5—169,4	168,5		1		4	8	7	37	44	26	14	11				1		153	2	306	612	—3	—6
169,5—171,4	170,5					4	5	11	22	21	18	16	5	3				105	3	315	945	107	321
171,5—173,4	172,5					1	5	12	18	13	12	15	4		1			81	4	324	1296	79	316
173,5—175,4	174,5					1	4	3	8	14	9	7	2	4				52	5	260	1300	67	335
175,5—177,4	176,5						1	2	6	7	9	3	3	1	1			33	6	198	1188	53	318
177,5—179,4	178,5					1		3	4	5	1	3		1				18	7	126	882	15	105
179,5—181,4	180,5							1			1		1					3	8	24	192	5	40
181,4—183,4	182,5										1	2	1					4	9	36	324	12	108
P_y		1	4	6	27	91	140	178	219	173	121	69	20	9	4	1		1063		991	9579	—122	2737
a_y		—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	7							
P_{a_y}		—7	—24	—30	—108	—273	—280	—178		173	242	207	80	45	24	7		—122					
$P_{a_y}^2$		49	144	150	432	819	560	178		173	484	621	320	225	144	49		4348					
P_{a_x}		—8	—16	—19	—52	—93	—77	146	249	266	245	223	76	42	7	2		991					
$P_{a_x a_y}$		56	96	95	208	279	154	—146		266	490	669	304	210	42	14		2737					

$A_x = 164{,}5,\ dx = 2$

$$\nu_{1x} = \frac{991}{1063} = 0{,}9323$$

$$\nu_{2x} = \frac{9579}{1063} = 9{,}0113$$

$$\nu_{xy} = \frac{2737}{1063} = 2{,}5748$$

$$M_x = 164{,}5 + 0{,}9323 \cdot 2 = 166{,}36$$

$$\sigma'_x = \sqrt{9{,}0113 - 0{,}9323^2} = 2{,}85$$

$$\sigma_x = 2{,}85 \cdot 2 = 5{,}70$$

$A_y = 87{,}5;\ dy = 2$

$$\nu_{1y} = -\frac{122}{1063} = -0{,}1148$$

$$\nu_{2y} = \frac{4348}{1063} = 4{,}0903$$

$$\nu_{yx} = \frac{2737}{1063} = 2{,}5748$$

$$M_y = 87{,}5 - 0{,}1148 \cdot 2 = 87{,}27$$

$$\sigma'_y = \sqrt{4{,}0903 - 0{,}1148^2} = 2{,}02$$

$$\sigma_y = 2{,}02 \cdot 2 = 4{,}04$$

$$r = \frac{2{,}5748 + 0{,}9323 \cdot 01148}{2{,}85 \cdot 2{,}02} = 0{,}466.$$

При вычислении коэффициента корреляции будем иметь в виду, что ниже в его формуле элементы взяты без учета интервала, поэтому в знаменателе средние квадратические отклонения отмечены штрихами (они в два раза меньше, чем приведенные выше):

$$r = \frac{\nu_{11} - \nu_{1x}\,\nu_{1y}}{\sigma'_x\,\sigma'_y} = \frac{2{,}5748 + 0{,}1070}{2{,}85 \cdot 2{,}02} = \frac{2{,}6818}{5{,}757} = 0{,}466.$$

Иногда техника вычислений несколько изменяется, и коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\Sigma P\, a_x\, a_y - N\nu_{1x}\,\nu_{1y}}{N\sigma'_x\,\sigma'_y},$$

так что

$$r = \frac{2737 + 113{,}7410}{6119{,}6910} = 0{,}466.$$

Вычисление коэффициента корреляции, особенно элемента $P\alpha_x\alpha$, требует внимания и достаточного навыка.

б) Второй способ

Изложенный способ не является единственным. Существуют приемы приближенного вычисления; в частности, можно воспользоваться специальной номограммой 2 (рис. 35).

Номограмма построена для формулы коэффициента корреляции $r = \cos q\pi$, где q — относительная численность пар значений, в которых отклонения обеих переменных от средних имеют разные знаки. Чтобы пользоваться номограммой, нужно предварительно вычислить средние арифметические обоих признаков (такое вычисление все равно необходимо произвести для любых связанных со стандартами расчетов)[1]. После определения средних нетрудно отобрать бланки, в которых одна переменная выше средней, другая — ниже. Для этого можно предварительно сделать на бланках соответствующие пометки или расположить бланки в порядке возрастания одной переменной, чтобы обращать внимание только на другую и т. п. Найденное число сочетаний, имеющих разные знаки, обозначим через n, а общее число наблюдений — через N. Тогда, обращаясь к номограмме, найдем на шкалах n и N соответствующие пометки. Соединяя их нитью или линейкой и продолжая нить или линейку до шкалы r, прочтем на ней ответ. Шкала N рассчитана до 1000. Поэтому, если N больше 1000, то оба числа n и N уменьшаются в 10 раз. В материале, заключенном в таблице 15, $N = 1063$, $n = 369$; уменьшив оба числа в 10 раз, находим на шкале N пометку 106, на шкале n — пометку 37; соединяя их нитью и продолжая нить до шкалы r, найдем ответ: $r = 0{,}46$, т. е. почти то же самое, что получено выше. Номограммой можно пользоваться также для проверки вычислений, выполненных при помощи корреляционной решетки. Для этого производятся следующие операции.

1. Интервалы, заключающие средние и называемые центральными, обводятся жирными чертами, как в табл. 15. Поле таблицы делится при этом на четыре части, не считая центральных полос.

[1] Среднюю арифметическую можно заменить так называемой медианой, т. е. срединным значением, находимым без вычислений.

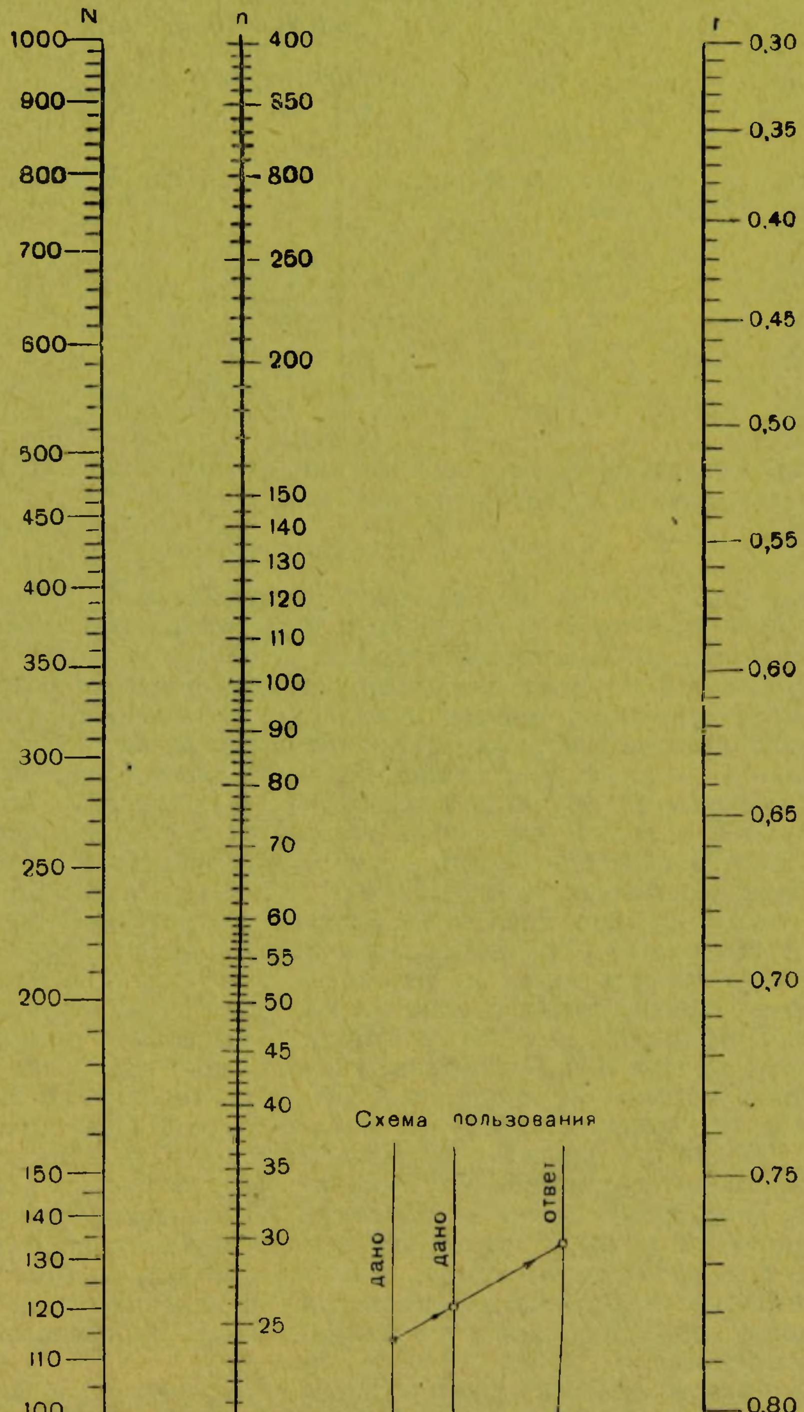


Рис. 35. Номограмма 2. Определение коэффициента корреляции

2. Определяются численности верхней правой и нижней левой долей поля. В нашем примере $n_1 = 100 + 111 = 211$.

3. Находится расстояние от средних до начала центральных интервалов: 1) $166{,}4 - 165{,}5 = 0{,}9$; 2) $87{,}3 - 86{,}5 = 0{,}8$.

4. Найденные разницы делятся на величины интервалов; получается: 1) $\alpha_x = 0{,}9 : 2 = 0{,}45$; 2) $\alpha_y = 0{,}8 : 2 = 0{,}40$.

5. Определяются численности центральных столбцов и строк до и после центральной клетки:

$$1)\ n_{1x} = 86;\ 2)\ n_{2x} = 102;\ 3)\ n_{1y} = 66;\ 4)\ n_{2y} = 61.$$

6. Обозначая численность центральной клеточки (в нашем случае 31) через n_3, подставим все найденные значения в формулу

$$n = n_1 + n_{1x} + n_{1y} + (n_{2x} - n_{1x})\,\alpha_y + (n_{2y} - n_{1y})\,\alpha_x + n_3\,(\alpha_x + \alpha_y - 2\alpha_x\alpha_y).$$

В нашем случае:

$$n = 211 + 86 + 66 + 16 \cdot 0{,}4 + (-5) \cdot 0{,}45 + 31\,(0{,}45 + 0{,}40 - 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}40) = 382{,}34.$$

7. Остается применить номограмму, беря $N = 1063$ и $n = 382$. Получаем $r = 0{,}44$. Отклонение от точного коэффициента составляет 0,026, что не имеет практического значения [1].

Приложение 2

Испытание нормальности корреляций между антропологическими признаками

Для испытания нормальности корреляции приняты два критерия: 1) нормальность итоговых распределений, 2) отношения между моментами.

Нормальность итоговых распределений проверялась критерием λ.

Из соотношений между моментами проверялись следующие:

$$\mu_{21} = \mu_{12} = 0,\quad \mu_{31} = 3r\,\sigma_x^2\,\sigma_y,$$

$$\mu_{13} = 3r\,\sigma_x\,\sigma_y^2,\qquad \mu_{22} = (1 + 2r^2)\,\sigma_x^2\,\sigma_y^2.$$

Здесь, как и ниже, символ μ_{kl} обозначает среднее произведение отклонений k-й степени одной переменной на l-ую степень другой.

Подробности, относящиеся к этому критерию нормальности распределения, приводятся ниже, в статье научного сотрудника Института антропологии Пугачевой А. В.

Из трех корреляционных таблиц, подвергнутых испытанию на нормальность распределения, здесь приводится лишь одна — для вертикального обхвата головы и дугового размера через лоб. Таблица же корреляции между ростом и весом дается ниже, в статье Е. И. Фортунатовой (стр. 76), а между ростом и обхватом груди приведена выше (табл. 15).

---

[1] Другой способ приближенного вычисления предложен научным сотрудником Института антропологии Е. И. Фортунатовой и изложен в ее статье (стр.72 и след.).

Вертикальный обхват головы (x) и дуговой размер через лоб (y) в *мм*

Дуговой размер (y) / Вертикальный обхват (x)	260—269	270—279	280—289	290—299	300—309	310—319	320—329	330—339	340—349	Итого	Ожидаемое распределение
580—589											1
590—599			2	1		1	1			5	3
600—609		3	7	4	3	1				18	14
610—619			12	17	13	3				45	47
620—629		5	18	46	41	10	1	1		122	123
630—639	1	2	30	87	79	34	10	2		245	250
640—649		6	27	114	157	81	14	2		401	393
650—659		2	20	116	224	111	32	3		508	481
660—669			14	76	178	141	33	3		445	453
670—679			3	42	92	141	45	10		333	331
680—689			2	11	41	72	42	8	1	177	188
690—699			1	1	12	35	19	3		71	82
700—709					3	6	7	5	1	22	28
710—719						2		1	2	5	7
720—729						1	2	1	1	5	1
Итого	1	18	136	515	843	639	206	39	5	2402	2402
Ожидаемое распределение	1	20	141	484	812	646	248	46	4	2402	

Под ожидаемым распределением подразумевается выравненное по нормальной кривой. Подобное же выравнивание выполнено и для двух других корреляционных таблиц, после чего вычислялась мера соответствия $P(\lambda)$. Получились следующие значения $P(\lambda)$:

Рост (1)	0,672	Вес	0,995
Рост (2)	0,453	Обхват груди . .	0,999,

(1) по таблице рост и вес, (2) по таблице рост и обхват груди.

Из приводимых цифр вытекает, что итоговые распределения удовлетворяют требованию нормальности.

Соотношения между наблюдаемыми и ожидаемыми значениями μ_{kl} представлены в табл. 17.

Таблица 17

Соответствие моментов (вычисленных в рабочих единицах, равных классовым интервалам переменных)

Корреляции	μ	Наблюдаемые	Ожидаемые	Ошибки
Рост и вес	μ_{21}	— 2,36	0	2,47
	μ_{12}	— 0,20	0	2,84
	μ_{31}	162,33	145,23	23,91
	μ_{13}	207,10	193,38	36,95
	μ_{22}	172,62	158,24	22,65
Рост и обхват груди	μ_{21}	— 1,78	0	0,98
	μ_{12}	— 0,76	0	0,70
	μ_{31}	70,11	65,23	9,36
	μ_{13}	33,70	32,77	4,64
	μ_{22}	52,20	47,48	5,99
Обхват головы и дуга через лоб	μ_{21}	0,34	0	0,17
	μ_{12}	0,10	0	0,10
	μ_{31}	12,74	11,66	1,30
	μ_{13}	4,15	3,91	0,42
	μ_{22}	7,84	6,97	0,62

Таблица убеждает в том, что разница между ожиданиями и наблюдениями почти нигде не превышает статистической ошибки.

Совокупность приведенных результатов свидетельствует, что все три рассмотренные поверхности распределения не отклоняются от нормальных.

Приложение 3

Нормальная множественная корреляция

При нормальной множественной корреляции относительная численность сочетаний различных значений n признаков $x'_1, x'_2,\dots x'_n$, расположенных в центрах интервалов $\Delta'_1, \Delta'_2,\dots \Delta_n$, обозначаемая через $z\Delta'_1, \Delta_2,\dots \Delta'_n$, при малых Δ' выражается приближенным равенством

$$z\,\Delta_1'\,\Delta_2'\ldots\Delta_n' = \lambda\, e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\,\Delta_1'\,\Delta_2'\ldots\Delta_n', \qquad (1)$$

где
$$\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n\,\kappa_n}, \qquad (2)$$

$$\kappa_n^2 = R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & 1 \end{vmatrix} > 0, \qquad (3)$$

$$\chi^2 = \frac{1}{R}\sum_{i,h} R_{ih}\,\frac{x_i'\,x_h'}{\sigma_i\,\sigma_h}, \qquad (4)$$

R_{ih}— минор, соответствующий элементу $r_{ih} = r_{hi}$[1], σ_1, $\sigma_2 \ldots \sigma_h$ —средние квадратические отклонения соответствующих размеров. Значения размеров представлены в виде отклонений от средних арифметических.

Пример вычисления параметров формулы (1)

Вывести формулу частоты сочетаний четырех размеров: длины тела (1), обхвата груди (2), длины руки (3) и длины ноги (4). Корреляции между ними равны:

$$r_{12} = 0{,}50, \qquad r_{23} = 0{,}40,$$
$$r_{13} = 0{,}75, \qquad r_{24} = 0{,}45,$$
$$r_{14} = 0{,}85, \qquad r_{34} = 0{,}80.$$

Для упрощения расчетов примем за единицы измерений признаков их средние квадратические отклонения, так что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1$, и x_1', x_2', x_3', x_4' представляют собою нормированные отклонения от средних арифметических.

Вычисления сводятся к нахождению значений определителя (четвертого порядка) R и его миноров R_{ih}, причем

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}50 & 0{,}75 & 0{,}85 \\ 0{,}50 & 1 & 0{,}40 & 0{,}45 \\ 0{,}75 & 0{,}40 & 1 & 0{,}80 \\ 0{,}85 & 0{,}45 & 0{,}80 & 1 \end{vmatrix}$$

Для вычисления этого определителя произведем операцию, называемую разложением по элементам первого столбца или строки. Каждому элементу 1-го столбца, или элементу $1h$, соответствует определитель 3-го порядка, называемый минором, который получается вычеркиванием 1-го столбца и h-й строки и имеет знак — если h четное. Определитель R равен алгебраической сумме миноров, умноженных на соответствующие им элементы.

---

[1] Выражение R представляет собою определитель или детерминант n-го порядка. Он составлен из всех коэффициентов корреляции, расположенных в порядке, который легко усматривается в формуле (3); при этом диагональ состоит из единиц, а $r_{12} = r_{21}$ и т. д. Порядок вычисления определителей показан ниже на примере. Минором R_{ih} называется определитель n—1-го порядка (младший по отношению к R, который в свою очередь называется старшим относительно минора R_{ih}), получаемый зачеркиванием i-ой строки и h-го столбца, причем минор имеет знак, определяемый выражением $(-1)^{i+h}$. Символ $\kappa_n = \sqrt{R}$ введен для удобства дальнейших обозначений.

Получается $R = 1 . R_{11} - 0{,}5 R_{12} + 0{,}75 R_{13} - 0{,}85 R_{14}$ (5)

или

$$R = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0{,}40 & 0{,}45 \\ 0{,}40 & 1 & 0{,}80 \\ 0{,}45 & 0{,}80 & 1 \end{vmatrix} - 0{,}50 \begin{vmatrix} 0{,}50 & 0{,}75 & 0{,}84 \\ 0{,}40 & 1 & 0{,}80 \\ 0{,}45 & 0{,}80 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 0{,}75 \begin{vmatrix} 0{,}50 & 0{,}75 & 0{,}85 \\ 1 & 0{,}40 & 0{,}45 \\ 0{,}45 & 0{,}80 & 1 \end{vmatrix} - 0{,}85 \begin{vmatrix} 0{,}50 & 0{,}75 & 0{,}85 \\ 1 & 0{,}40 & 0{,}45 \\ 0{,}40 & 1 & 0{,}80 \end{vmatrix}$$

Остается вычислить каждый из миноров. Это можно сделать путем дальнейшего разложения миноров по элементам 1-го столбца или 1-й строки; так, 1-й минор равен

$$R_{11} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0{,}80 \\ 0{,}80 & 1 \end{vmatrix} - 0{,}40 \begin{vmatrix} 0{,}40 & 0{,}45 \\ 0{,}80 & 1 \end{vmatrix} + 0{,}45 \begin{vmatrix} 0{,}40 & 0{,}45 \\ 1 & 0{,}80 \end{vmatrix}$$

Каждый из полученных определителей 2-го порядка равен разности произведений элементов, расположенных по главной и побочной диагоналям, причем главной называется диагональ, идущая от верхнего левого угла. Следовательно, первый определитель равен $1{,}1 - 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$; второй равен $0{,}4 \cdot 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}45 = 0{,}4 - 0{,}36 = 0{,}04$; третий равен $0{,}40 \cdot 0{,}80 - 1 \cdot 0{,}45 = 0{,}32 - 0{,}45 = -0{,}13$. Поэтому $R_{11} = 0{,}36 - 0{,}4 \cdot 0{,}04 - 0{,}45 \cdot 0{,}13 = 0{,}2855$.

Аналогично находятся $R_{12} = 0{,}0395$, $R_{13} = -0{,}051125$, $R_{14} = 0{,}184$. Подставляя найденные результаты в формулу (5), получаем $R = 0{,}2855 - 0{,}50 \cdot 0{,}0395 - 0{,}75 \cdot 0{,}051125 - 0{,}85 \cdot 0{,}184 = 0{,}071006$. Подобным же образом определяются миноры R_{ih}, причем R_{11}, R_{12}, R_{13} и R_{14} уже найдены в процессе вычисления R. Остается найти R , R_{23}, R_{24}, R_{33}, R_{34} и R_{44}. Производя вычисления, получим:

$$R_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}75 & 0{,}85 \\ 0{,}75 & 1 & 0{,}80 \\ 0{,}85 & 0{,}80 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}095,$$

$$R_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}50 & 0{,}85 \\ 0{,}75 & 0{,}40 & 0{,}80 \\ 0{,}85 & 0{,}45 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}002875.$$

Определитель с нечетной суммой индексов (как R_{23}, у которого сумма индексов равна 5) имеет знак минус. Выполнив расчеты и учитывая, что $R_{ih} = R_{hi}$, найдем

$R_{11} = 0{,}2855$, $R_{23} = R_{32} = 0{,}002875$,

$R_{12} = R_{21} = 0{,}0395$, $R_{24} = R_{42} = -0{,}006875$,

$R_{13} = R_{31} = -0{,}051125$, $R_{33} = 0{,}2075$,

$R_{14} = R_{41} = 0{,}184$, $R_{34} = R_{43} = 0{,}121250$,

$R_{22} = 0{,}095$, $R_{44} = 0{,}3275$,

$R = 0{,}071006$.

(Отсюда $\kappa_4 = \sqrt{R} = 0{,}26647$).

Подставляя результаты вычислений в формулы (2) и (4), получим

$$\lambda = \frac{1}{(2\pi)^2 \kappa_4} = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{R}} = \frac{1}{39{,}478351 \cdot 0{,}26647} = 0{,}095059 \quad \text{и}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{0{,}071006} (0{,}2855 x_1^2 + 0{,}0790 x_1 x_2 - 0{,}10225 x_1 x_3 + 0{,}3680 x_1 x_4 +$$

$$+ 0{,}0950 x_2^2 + 0{,}00575 x_2 x_3 - 0{,}01375 x_2 x_4 + 0{,}2075 x_3^2 +$$

$$+ 0{,}2425 x_3 x_4 + 0{,}3275 x_4^2).$$

Наконец, подставив значения λ и χ^2 в (1), подходим к искомой формуле относительных численностей сочетаний величин длины тела (x_1), обхвата груди (x_2), длины руки (x_3) и длины ноги (x_4), причем x_1, x_2, x_3 и x_4 выражают отклонения от средних арифметических, деленные на средние квадратические отклонения.

Так, если все $x = 1$, все Δ' равны $^1/_2\ \sigma$, то

$$\chi^2 = \frac{1,49475}{0,071006} = 21,051,$$

$$z\Delta_1'\Delta_2'\Delta_3' = 0,095059\ e^{-10,5255} \cdot {}^1/_{16} = 0,00000015946.$$

Следовательно, относительная численность людей, у которых все четыре размера отклоняются от средних величин на $(1 \pm {}^1/_4)\ \sigma$, равна около 2 на 10 миллионов.

Такую же численность имеют вообще все сочетания, для которых $\chi^2 = 21,051$. Множество таких значений образуют так называемый четырехмерный эллипсоид, обозначаемый $E\chi_4^2$. В общем же виде выражение (4) называют уравнением n-мерного эллипсоида параметра χ_n^2.

Число вариантов или стандартов, заключающихся в пределах значений $\pm x_1$, $\pm x_2 \ldots \pm x_n$, равно:

$$N = \frac{v}{\Delta'_1\Delta'_2 \ldots \Delta'_n},$$

где v — объем эллипсоида равных вероятностей параметра χ_n^2. Известно, что

$$v = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\ \chi_n^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\ \sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma_n\ K_n,$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{1}{2}\ \sqrt{n} \quad \text{при нечетном } n,$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \ldots 1 \quad \text{при четном } n.$$

Следовательно,

$$N = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\ \chi_n^n\ K_n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Delta_1\ \Delta_2 \ldots \Delta_n}, \tag{6}$$

где Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — нормированные интервалы переменных.

Отсюда χ_n может быть выражено как функция от числа вариантов:

$$\chi_n = \sqrt[n]{\frac{N\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Delta_1\,\Delta_2 \ldots \Delta_n}{\pi^{\frac{n}{2}}\ K_n}}.$$

Это выражение понадобится во второй нашей статье при определении зависимости удовлетворенности населения от числа вариантов изделий.

Таблицы нормального распределения

Таблица 18. Значения $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ (в 10 000-х)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3938	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0159	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Таблица 19. Значения $F(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ (в 10 000-х)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0080	0160	0239	0319	0399	0478	0558	0638	0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2961	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778
1,0	6827	6875	6923	6970	7017	7063	7109	7154	7199	7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7995	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9534
2,0	9545	9556	9566	9576	9586	9596	9606	9616	9625	9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9840	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9929
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3,0	9973	9974	9975	9976	9976	9977	9978	9979	9979	9980

Таблица 20. Значения $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (в 10 000 - х)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
— 3,0	0014	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
— 2,9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
— 2,8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
— 2,7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
— 2,6	0047	0045	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036
— 2,5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
— 2,4	0082	0080	0078	0076	0073	0071	0070	0068	0066	0064
— 2,3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
— 2,2	0139	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110
— 2,1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
— 2,0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
— 1,9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
— 1,8	0359	0352	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
— 1,7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
— 1,6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
— 1,5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
— 1,4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
— 1,3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
— 1,2	1151	1131	1112	1094	1075	1057	1038	1020	1003	0985
— 1,1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
— 1,0	1587	1563	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
— 0,9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
— 0,8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1868
— 0,7	2420	2389	2358	2327	2297	2266	2236	2207	2177	2148
— 0,6	2743	2709	2676	2644	2611	2579	2546	2514	2483	2451
— 0,5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
— 0,4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
— 0,3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
— 0,2	4207	4168	4129	4091	4052	4013	3974	3936	3897	3859
— 0,1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
— 0,0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5754
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7258	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7518	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7996	8023	8051	8079	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9430	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9700	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9762	9767
2,0	9773	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9874	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9924	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9980	9980	9981
2,9	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9886
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990

Таблица 21. Значения функций, применяемых при определении нормальной кривой по ее части

λ	Ψ_1	Ψ_2	λ	Ψ_1	Ψ_2
2,0	0,210	0,487	0,00	0,571	1,253
1,9	0,224	0,508	0,01	0,573	1,259
1,8	0,239	0,531	0,02	0,574	1,265
1,7	0,254	0,556	0,03	0,576	1,271
1,6	0,271	0,582	0,04	0,578	1,276
1,5	0,288	0,610	0,05	0.580	1,282
1,4	0,305	0,640	0,06	0,581	1,288
1,3	0,323	0,671	0,07	0,583	1,294
1,2	0,342	0,704	0,08	0,585	1,300
1,1	0,361	0,740	0,09	0,587	1,305
1,0	0,380	0,777	0,1	0,588	1,311
0,9	0,399	0,816	0,2	0,605	1,371
0,8	0,419	0,857	0,3	0,622	1,432
0,7	0,438	0,899	0,4	0,638	1,495
0,6	0,458	0,944	0,5	0,653	1,560
0,5	0,477	0,991	0,6	0,668	1,626
0,4	0,497	1,040	0,7	0,682	1,693
0,3	0,516	1,090	0,8	0,696	1,762
0,2	0,535	1,143	0,9	0,709	1,833
0,1	0,553	1,197	1,0	0,722	1,904
0,09	0,555	1,203	1,1	0,734	1,977
0,08	0,557	1,208	1,2	0,746	2,051
0,07	0,558	1,214	1,3	0,757	2,126
0,06	0,560	1,219	1,4	0,767	2,202
0,05	0,562	1,225	1,5	0,777	2,280
0,04	0,564	1,231	1,6	0,787	2,358
0,03	0,565	1,236	1,7	0,796	2,437
0,02	0,567	1,242	1,8	0,804	2,517
0,01	0,569	1,248	1,9	0,813	2,598
0,00	0,571	1,253	2,0	0,820	2,679

Е. И. ФОРТУНАТОВА

СПОСОБ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

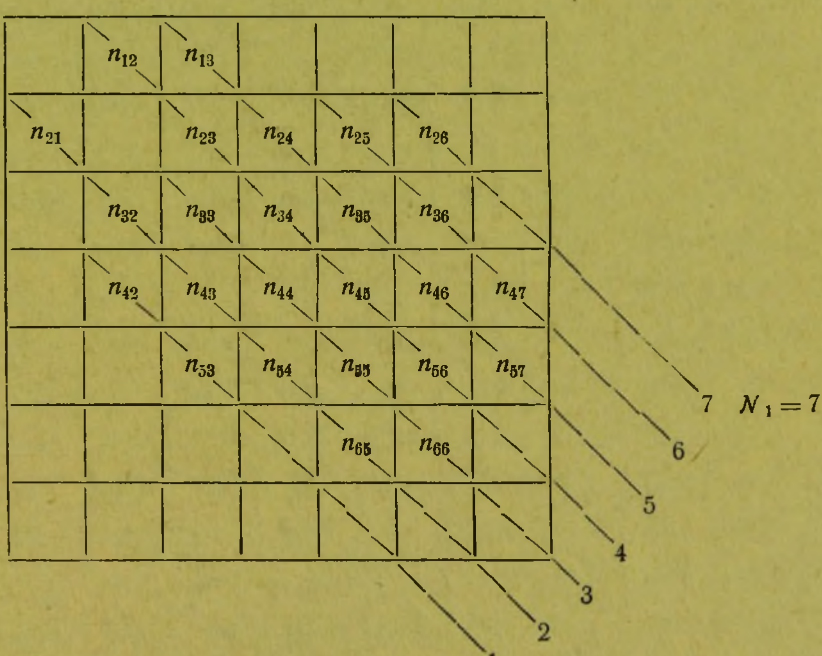
Для распределений, близких к нормальному, коэффициент корреляции можно найти упрощенным способом по корреляционной решетке, заполненной на основании эмпирических данных (при достаточно большой их численности).

Для получения коэффициента корреляции достаточно определить число параллельных прямых, проходящих через заполненные клеточки корреляционной решетки и пересекающих каждую из них в качестве диагонали. Эти линии будем называть диагональными (см. схемы).

Через клетки с частотами проводим диагональные линии в направлении от верхнего левого угла к правому нижнему; число линий этого направления — назовем его главным — обозначим через N_1 (схема 1).

1. СХЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ N_1

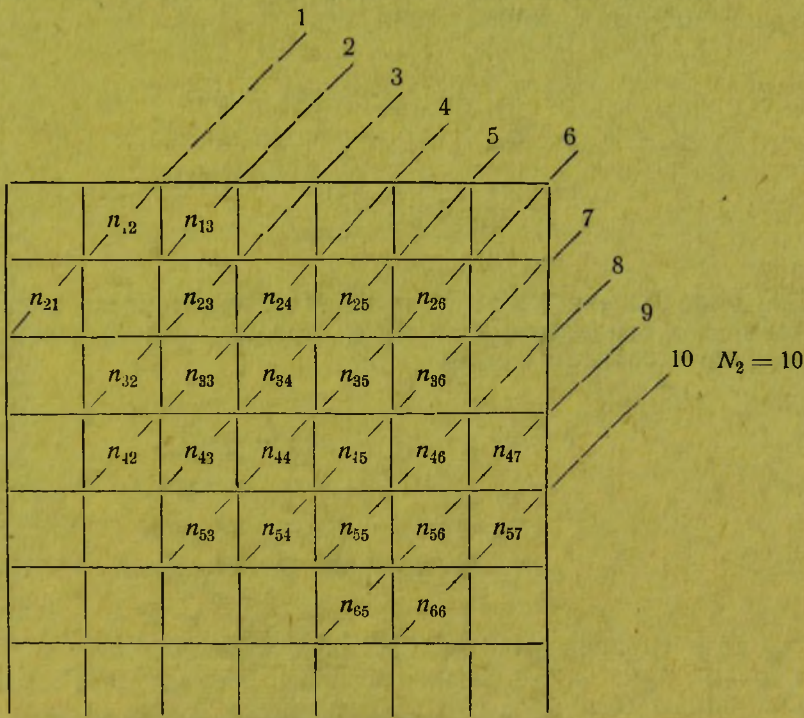
Корреляционная решетка



Через те же клетки с частотами проводим диагональные линии в направлении, перпендикулярном главному (от нижнего левого угла к верхнему правому углу); число линий этого направления — назовем его побочным — обозначим через N_2 (схема 2).

2. СХЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ N_2

Корреляционная решетка



Через n_{ij} обозначены заполненные клетки корреляционной решетки — частоты i-й строки j-го столбца.

Если на решетке есть далеко отстоящие заполненные клетки, их считать не надо.

Числа N_1 и N_2 можно определить двумя способами:

1-й способ. Для определения числа N_1 проводим диагональные линии главного направления (схема 1):

1-я линия (крайняя) пройдет через клетки с частотами n_{42} и n_{53}.
2-я линия — через клетки с частотами n_{21}, n_{32}, n_{43}, n_{54} и n_{65}.
3-я „ „ „ „ n_{33}, n_{44}, n_{55} и n_{66} и т. д.

. . . .

7-я линия (крайняя) пройдет через клетку с частотой n_{26}.

$$N_1 = 7.$$

Для определения числа N_2 проводим диагональные линии побочного направления (схема 2):

1-я линия (крайняя) пройдет через клетки с частотами n_{21} и n_{12}.
2-я „ „ „ „ „ „ n_{13}.
3-я „ „ „ „ „ „ n_{32}, n_{23},

. . . .

10-я линия (крайняя) пройдет через клетки с частотами n_{66} и n_{57}.

$$N_2 = 10.$$

2-й способ. Числа N_1 и N_2 можно найти, не проводя всех диагональных линий, а ограничиваясь двумя крайними, между которыми считают число клеток, причем для определения N_1 клетки считают в направлении побочном; для определения N_2 — в главном; чтобы перейти от числа клеток к числу диагональных линий, надо полученное число клеток удвоить и прибавить единицу.

Определяя таким способом число N_1, имеем (схема 1): число клеток между крайними диагональными линиями (первой и седьмой) равно 3 (считая в побочном направлении)

от n_{53} до n_{44} — одна клетка,
„ n_{44} до n_{35} — вторая клетка,
„ n_{35} до n_{26} — третья клетка,

$$N_1 = (3 \times 2) + 1 = 7.$$

Для определения числа N_2 имеем (схема 2): число клеток между крайними диагональными линиями (первой и десятой) равно $4^1/_2$ (считая клетки в главном направлении)

от n_{21} до n_{32} — одна клетка,
„ n_{32} до n_{43} — вторая клетка,
„ n_{43} до n_{54} — третья клетка,
„ n_{54} до n_{65} — четвертая клетка,

от n_{65} до последней диагональной линии (проходящей через клетки с частотами n_{66} и n_{57}) — пятая клетка, но так как последняя диагональная линия (10-я) проходит на расстоянии $^1/_2$ клетки от предыдущей (9), то всего клеток — $4^1/_2$;

$$N_2 = (4^1/_2 \times 2) + 1 = 10.$$

Вычислив отношение $\frac{N_1}{N_2}$, находим коэффициент корреляции (r) по табл. 1.

Пример вычисления дается в табл. 2.

Находим числа N_1 и N_2 согласно схемам. В данном случае они равны

$$N_1 = 18;\ N_2 = 38;\ \frac{N_1}{N_2} = \frac{18}{38} = 0{,}47.$$

По табл. 1 находим $r = 0{,}64$.

Точное значение коэффициента корреляции: $r = 0{,}67$.

Табл. 1 не применима, если число интервалов одного признака значительно (в $1^1/_2$—2 раза) превышает число интервалов другого признака.

Расчет табл. 1 основан на том, что отношение $\frac{N_1}{N_2}$ при равном числе интервалов обеих переменных равно отношению малой оси корреляционного эллипса к большой. Известно, что длины осей корреляционного эллипса равны:

$$a = \theta \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\, r^2\, \sigma_x^2\, \sigma_y^2}},$$

$$b = \theta \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\, r^2\, \sigma_x^2\, \sigma_y^2}},$$

где θ зависит от r, σ_x и σ_y.

Таблица 1

Ожидаемые коэффициенты корреляции при заданном отношении $\frac{N_1}{N_2}$

$\frac{N_1}{N_2}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,97
0,1	0,97	0,97	0,96	0,96	0,96	0,95	0,95	0,95	0,94	0,94
0,2	0,93	0,92	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86	0,85	0,84
0,3	0,83	0,82	0,81	0,80	0,79	0,78	0,77	0,76	0,75	0,74
0,4	0,72	0,71	0,70	0,69	0,68	0,66	0,65	0,64	0,63	0,61
0,5	0,60	0,59	0,58	0,56	0,55	0,54	0,52	0,51	0,50	0,48
0,6	0,47	0,46	0,45	0,43	0,42	0,41	0,39	0,38	0,37	0,35
0,7	0,34	0,33	0,32	0,30	0,29	0,28	0,27	0,26	0,24	0,23
0,8	0,22	0,21	0,20	0,18	0,17	0,16	0,15	0,14	0,13	0,12
0,9	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01

Числа N_1 и N_2 определены, как показано в табл. 2.

Если средние квадратические отклонения σ выражены в рабочих единицах, равных величинам интервалов, то при одинаковом числе интервалов обеих переменных (как это обычно бывает в распределениях антропологических признаков) приближенно $\sigma_x = \sigma_y$.

Отсюда

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}$$

и

$$r = \frac{N_2^2 - N_1^2}{N_2^2 + N_1^2}.$$

По этой формуле и вычислены значения табл. 1.

Таблица 2

Корреляция между ростом (x) и весом (y)

x (см) \ y (см)	39,5-41,4	41,5-43,4	43,5-45,4	45,5-47,4	47,5-49,4	49,5-51,4	51,5-53,4	53,5-55,4	55,5-57,4	57,5-59,4	59,5-61,4	61,5-63,4	63,5-65,4	65,5-67,4	67,5-69,4	69,5-71,4	71,5-73,4	73,5-75,4	75,5-77,4	77,5-79,4	79,5-81,4	81,5-83,4	83,5-85,4	ИТОГО
147,5-149,4	1		1																					2
149,5-151,4							2	2																4
151,5-153,4			1		2		4			1														8
153,5-155,4					2	1	5		1															9
155,5-157,4				1	3	3	3	4	2	2	1		1											20
157,5-159,4				1	2	1	3	7	7	5	5	1												32
159,5-161,4						2	7	4	8	5	6	6	2	1	1			1						43
161,5-163,4						2	5	10	14	16	15	12	6	8	1	2	1							92
163,5-165,4						1	4	5	14	16	18	11	12	4	3	3								91
165,5-167,4						1	3	5	12	16	13	16	16	12	7	7		2						110
167,5-169,4						1	2	4	6	6	8	19	14	12	11	7	1	2	2		1			96
169,5-171,4								1	1	1	6	14	10	12	5	5	1	2	1					59
171,5-173,4							1				2	12	12	7	7	5	5	1	2	1			1	56
173,5-175,4									1		1	6	3	8	4	8	2	4						37
175,5-177,4											1	1	1	1	2	1	4		1	1	2		1	15
177,5-179,4													2	3		1	2	1		1				10
179,5-181,4																1				1				2
181,5-183,4																		1	1		1			3
ИТОГО	1	-	2	2	9	12	39	42	56	68	76	98	79	68	41	40	16	14	7	4	4	-	2	690

Диагональные линии побочного направления $N_2 = 38$

Диагональные линии главного направления $N_1 = 18$

А. В. ПУГАЧЕВА

О ПРОВЕРКЕ НОРМАЛЬНОСТИ КОРРЕЛЯЦИИ

При анализе статистического материала, представленного в виде некоторого распределения двух случайных переменных, часто требуется решить вопрос о нормальности этого распределения.

Предъявляется целый комплекс требований, соблюдение которых рассматривается как доказательство этого положения. Одним из таких обязательных условий нормальности является определенное соотношение между моментами, выраженное следующими формулами[1]:

$$\mu_{21} = \mu_{12} = 0; \qquad \mu_{31} = 3r\,\sigma_x^3\,\sigma_y;$$

$$\mu_{13} = 3r\,\sigma_x\,\sigma_y^3; \qquad \mu_{22} = (1 + 2r^2)\,\sigma_x^2\,\sigma_y^2,$$

здесь μ_{kl} — центральные моменты,

r — коэффициент корреляции,

σ_x и σ_y — средние квадратические отклонения признаков.

Если центральные моменты, найденные для нашей совокупности, достаточно точно удовлетворят этим формулам, мы можем считать распределение нормальным.

Надежность полученных моментов или допустимые размеры отклонения их от теоретических моментов нормального распределения, соответствующего параметрам нашей совокупности, определяется по формуле[2]:

$$n\,\sigma^2_{\mu_{kl}} \approx \mu_{2k,2l} - \mu^2_{kl} + k^2\,\mu_{20}\,\mu^2_{k-1,l} +$$
$$+ l^2\,\mu_{02}\,\mu^2_{k,l-1} + 2\,kl\,\mu_{11}\,\mu_{k-1,l}\,\mu_{k,l-1} -$$
$$- 2\,k\,\mu_{k+1,l}\,\mu_{k-1,l} - 2\,l\,\mu_{k,l+1}\,\mu_{k,l-1}.$$

Но непосредственное нахождение центральных моментов сопряжено с громоздкими вычислениями, так как уклонения от средней арифметической часто выражаются двух- или даже трехзначными числами, а возведенные в степень (для данных формул требуется шестая степень) дают многозначные числа. Во избежание этих трудностей находят моменты от какого-либо произвольного начала, то есть какое-нибудь значение признака, а если распределение дано в интервалах, то серединное значение интервала, чаще с наибольшей численностью, принимается за рабочую среднюю. Затем переходят к условным единицам, а именно — рабочую среднюю считают за нуль и интервал приравнивают единице, тогда отклонения выражаются

[1] Романовский В. Математическая статистика, М.—Л., 1938, стр. 385. Этот критерий применен в работе Игнатьева М. В. См. стр. 61 и след.

[2] Там же, стр. 386.

числами: ± 1, ± 2, ± 3 и т. д. При такой системе вычисление моментов от рабочей средней, которые в отличие от центральных моментов (μ) будем обозначать ν, не представляет особых затруднений.

Переход от найденных моментов ν_{kl} к центральным осуществляется по формулам, приводимым ниже. Небольшая часть этих формул обычно приводится при описании методов вычисления коэффициентов корреляции[1], остальные формулы для моментов высших порядков вычислены нами.

$$\mu_{20} = \nu_{20} - \nu_{10}^2,$$

$$\mu_{11} = \nu_{11} - \nu_{10}\nu_{01},$$

$$\mu_{02} = \nu_{02} - \nu_{01}^2,$$

$$\mu_{30} = \nu_{30} - 3\nu_{20}\nu_{10} + 2\nu_{10}^3,$$

$$\mu_{21} = \nu_{21} - 2\mu_{11}\nu_{10} - \nu_{20}\nu_{01},$$

$$\mu_{12} = \nu_{12} - 2\mu_{11}\nu_{01} - \nu_{02}\nu_{10},$$

$$\mu_{03} = \nu_{03} - 3\nu_{02}\nu_{01} + 2\nu_{01}^3,$$

$$\mu_{40} = \nu_{40} - 4\nu_{30}\nu_{10} + 6\nu_{20}\nu_{10}^2 - 3\nu_{10}^4,$$

$$\mu_{31} = \nu_{31} - 3\mu_{21}\nu_{10} - 3\mu_{11}\nu_{10}^2 - \nu_{30}\nu_{01},$$

$$\mu_{22} = \nu_{22} - 2(\mu_{21}\nu_{01} + \mu_{12}\nu_{10}) - 4\mu_{11}\nu_{10}\nu_{01} - \nu_{02}\nu_{10}^2 - \mu_{20}\nu_{01}^2,$$

$$\mu_{13} = \nu_{13} - 3\mu_{12}\nu_{01} - 3\mu_{11}\nu_{01}^2 - \nu_{03}\nu_{10},$$

$$\mu_{04} = \nu_{04} - 4\nu_{03}\nu_{01} + 6\nu_{02}\nu_{01}^2 - 3\nu_{01}^4,$$

$$\mu_{50} = \nu_{50} - 5\nu_{40}\nu_{10} + 10\nu_{30}\nu_{10}^2 - 10\nu_{20}\nu_{10}^3 + 4\nu_{10}^5,$$

$$\mu_{41} = \nu_{41} - 4\nu_{31}\nu_{10} + 6\nu_{21}\nu_{10}^2 - 4\nu_{11}\nu_{10}^3 + \nu_{01}\nu_{10}^4 - \nu_{01}\mu_{40},$$

$$\mu_{32} = \nu_{32} - \nu_{10}(3\nu_{22} - 3\nu_{12}\nu_{10} + \nu_{02}\nu_{10}^2) - 2\nu_{01}(\mu_{31} + \nu_{01}\mu_{30}) + \nu_{01}^2\mu_{30},$$

$$\mu_{23} = \nu_{23} - \nu_{01}(3\nu_{22} - 3\nu_{21}\nu_{01} + \nu_{20}\nu_{10}^2) - 2\nu_{10}(\mu_{13} + \nu_{10}\mu_{03}) + \nu_{10}^2\mu_{03},$$

$$\mu_{14} = \nu_{14} - 4\nu_{13}\nu_{01} + 6\nu_{12}\nu_{01}^2 - 4\nu_{11}\nu_{01}^3 + \nu_{10}\nu_{01}^4 - \nu_{10}\mu_{04},$$

$$\mu_{60} = \nu_{60} - 6\nu_{50}\nu_{10} + 15\nu_{40}\nu_{10}^2 - 20\nu_{30}\nu_{10}^3 + 15\nu_{20}\nu_{10}^4 - 5\nu_{10}^6,$$

$$\mu_{42} = \nu_{42} - \nu_{01}(2\nu_{41} - \nu_{40}\nu_{01}) - 4\nu_{10}(\nu_{32} - 2\nu_{31}\nu_{01} + \nu_{30}\nu_{01}^2) +$$
$$+ 6\nu_{10}^2(\nu_{22} - 2\nu_{21}\nu_{01} + \nu_{20}\nu_{01}^2) - 4\nu_{10}^3(\nu_{12} - 2\nu_{11}\nu_{01} + \nu_{10}\nu_{01}^2) + \nu_{10}^4\mu_{02},$$

$$\mu_{24} = \nu_{24} - \nu_{10}(2\nu_{14} - \nu_{04}\nu_{10}) - 4\nu_{01}(\nu_{23} - 2\nu_{13}\nu_{10} + \nu_{03}\nu_{10}^2) +$$
$$+ 6\nu_{01}^2(\nu_{22} - 2\nu_{12}\nu_{10} + \nu_{02}\nu_{10}^2) - 4\nu_{01}^3(\nu_{21} - 2\nu_{11}\nu_{10} + \nu_{01}\nu_{10}^2) + \nu_{01}^4\mu_{20},$$

[1] Например, Митропольский А. Техника статистических исчислений, М.—Л., 1931, стр. 264.

$$\mu_{62} = \nu_{62} - \nu_{01}\,(2\,\nu_{61} - \nu_{60}\,\nu_{01}) - 6\,\nu_{10}\,(\nu_{52} - 2\,\nu_{51}\,\nu_{01} + \nu_{50}\,\nu_{01}^2) + 15\,\nu_{10}^2$$

$$(\nu_{42} - 2\,\nu_{41}\,\nu_{01} + \nu_{40}\,\nu_{01}^2) - 20\,\nu_{10}^3\,(\nu_{32} - 2\,\nu_{31}\,\nu_{01} + \nu_{30}\,\nu_{01}^2) + 15\,\nu_{10}^4$$

$$(\nu_{22} - 2\,\nu_{21}\,\nu_{01} + \nu_{20}\,\nu_{01}^2) - 6\,\nu_{10}^5\,(\nu_{12} - 2\,\nu_{11}\,\nu_{01} + \nu_{10}\,\nu_{01}^2) + \nu_{10}^6\,\mu_{02},$$

$$\mu_{44} = \nu_{44} - \nu_{01}\,(4\,\nu_{43} - 6\,\nu_{42}\,\nu_{01} + 4\,\nu_{41}\,\nu_{01}^2 - \nu_{40}\,\nu_{01}^3) -$$

$$- 4\,\nu_{10}\,(\nu_{34} - 4\,\nu_{33}\,\nu_{01} + 6\,\nu_{32}\,\nu_{01}^2 - 4\,\nu_{31}\,\nu_{01}^3 + \nu_{30}\,\nu_{01}^4) +$$

$$+ 6\,\nu_{10}^2\,(\nu_{24} - 4\,\nu_{23}\,\nu_{01} + 6\,\nu_{22}\,\nu_{01}^2 - 4\,\nu_{21}\,\nu_{01}^3 + \nu_{20}\,\nu_{01}^4) -$$

$$- 4\,\nu_{10}^3\,(\nu_{14} - 4\,\nu_{13}\,\nu_{01} + 6\,\nu_{12}\,\nu_{01}^2 - 4\,\nu_{11}\,\nu_{01}^3 + \nu_{10}\,\nu_{01}^4) + \nu_{10}^4\,\mu_{04},$$

$$\mu_{26} = \nu_{26} - \nu_{10}\,(2\,\nu_{16} - \nu_{06}\,\nu_{10}) - 6_{01}\,(\nu_{25} - 2\,\nu_{15}\,\nu_{10} + \nu_{05}\,\nu_{10}^2) +$$

$$+ 15\,\nu_{01}^2\,(\nu_{24} - 2\,\nu_{14}\,\nu_{10} + \nu_{04}\,\nu_{10}^2) - 20\,\nu_{01}^3\,(\nu_{23} - 2\,\nu_{13}\,\nu_{10} + \nu_{03}\,\nu_{10}^2) +$$

$$+ 15\,\nu_{01}^4\,(\nu_{22} - 2\,\nu_{12}\,\nu_{10} + \nu_{02}\,\nu_{10}^2) - 6\,\nu_{01}^5\,(\nu_{21} - 2\,\nu_{11}\,\nu_{10} + \nu_{01}\,\nu_{10}^2) + \nu_{01}^6\,\mu_{20}.$$

Применение формул приводится выше, в статье Игнатьева М. В. (стр. 61).

П. Н. БАШКИРОВ

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ АНТРОПОЛОГИИ В СТАНДАРТИЗАЦИИ РАЗМЕРОВ ПРЕДМЕТОВ ЛИЧНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ

1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Предметы личного пользования, как-то: одежда, обувь, трикотажно-галантерейные изделия (чулки, носки, перчатки), головные уборы и т. д., должны по размерам и по покрою соответствовать размерам и в известном смысле форме тела человека. Но размеры и форма тела у человека, как известно, являются неодинаковыми. Следовательно, и расчеты в конструировании изделий должны быть различными. Поэтому всяким начинаниям в области конструирования изделий обычно предшествует снятие мерок: при помощи несложной измерительной техники устанавливаются размеры отдельных частей тела, соответственно которым и производятся нужные расчеты в крое изделия. Однако так обстоит дело при индивидуальных заказах.

С другим положением приходится сталкиваться при изготовлении изделий в условиях массового фабричного производства. Здесь отдельные особенности внешних форм тела человека не могут учитываться, и все расчеты в крое изделия ориентируются только на некоторые измерительные признаки, являющиеся с точки зрения конструирования данного вида изделия наиболее важными. При этом в большинстве случаев исходят из соотношений размеров тела, свойственных среднему типу морфологического статуса человека или, как принято называть в производстве, „нормальной фигуре".

Но какую фигуру следует принять за „нормальную"? В поисках ответа на этот вопрос рядом специалистов различных областей знания были выработаны особые правила, так называемые каноны пропорций тела. Их насчитывается более ста. Некоторые из них считаются особенно удачными, например, канон Сапожникова, и в качестве образчиков „нормального" соотношения размеров отдельных частей тела применяются в живописи, ваянии, а также в некоторых отраслях промышленности (швейной). Однако в свете современного учения о пропорциях тела каноны неправильно трактуют о соотношениях размеров отдельных частей тела. Объясняется это тем, что авторы канонов, будучи в большинстве случаев художниками, стремились отобразить в последних, по преимуществу, такие соотношения размеров отдельных частей тела, которые бы отвечали наиболее совершенной форме тела с точки зрения понятия о красоте. Но понятие о красоте является слишком условным и поэтому диктует необходимость многие детали воспроизводимого предмета стилизовать, в то время как другие, наоборот,—элиминировать. Именно с подобными явлениями мы и встречаемся в канонах.

Но не все художники слепо придерживаются канонов. Художники-реалисты, изображающие предметы такими, какими они являются в действительности, допускают резкие отклонения от канонов или не пользуются ими совсем. Еще древние греческие скульпторы, „если хотели выразить... грацию, то делали шею более тонкой и удлиняли члены, придавая им бо́льшую стройность; напротив, утолщали шею и конечности и придавали бо́льшую ширину плечам и массивность голове для выражения грубой силы; узкие плечи характеризовали юность, женственность; узкий таз—невинность; широкие бедра—чувственность“ (Карузин).

Мы не стали бы останавливаться на канонах, если бы специалисты ряда отраслей промышленности, и в первую очередь конструкторы одежды, не пытались использовать их в качестве образцов „нормальных“ пропорций тела. В поисках „нормальных“ фигур конструкторы одежды нередко вообще прибегают к данным изобразительных и пластических искусств, забывая или не зная того, что в живописи и ваянии часто приходится встречаться с элементами стилизации, и иногда в такой степени, что многие произведения искусств как раз и не отображают того, чего ищут конструкторы одежды—„нормальных“ соотношений размеров отдельных частей тела, хотя и возможно, что с эстетической или художественной точек зрения подобного рода произведения являются совершенными. Так, например, пропорции и форма тела, воспроизведенные в знаменитых статуях Апполона Бельведерского или Венеры Милосской, с эстетической или художественной точек зрения являются безукоризненными, но они настолько стилизованы, что реальными считаться не могут.

Таким образом, пользоваться данными о пропорциях тела, воспроизведенных в канонах специалистами швейного или какого-либо другого вида производства, не рекомендуется или во всяком случае следует пользоваться ими с большой осторожностью. Установить некое единое правило в соотношениях размеров отдельных частей тела человека, как это пытались сделать авторы канонов, нельзя, так как пропорции тела у людей различны. Они различны не только в разрезе возрастных и половых факторов, но и территориальных. Мало того, они различны и в пределах одной и той же возрастно-половой группы.

Выделяют несколько типов пропорций тела. При выделении их одни исследователи исходят из отношения размеров отдельных частей тела к длине тела (росту), другие—к длине корпуса и т. д. Поэтому число и название выделенных типов у различных авторов различны. Мы будем следовать из отношения размеров отдельных частей тела к длине тела (росту) и, придерживаясь наиболее распространенной терминологии, остановимся на трех наиболее часто встречаемых типах пропорций тела: долихоморфном, мезоморфном и брахиморфном[1].

Долихоморфный тип пропорций тела характеризуется относительно коротким, узким туловищем (узкие плечи, узкий таз) и относительно длинными конечностями (руки и ноги).

[1] От греческого долихос—длинный, мезос — средний, брахис —короткий и морфе — форма.

Брахиморфный тип пропорций тела, наоборот, характеризуется относительно длинным и широким туловищем и относительно короткими конечностями.

Мезоморфный тип пропорций тела занимает некое среднее, промежуточное положение между долихоморфным и брахиморфным типами. Он характеризуется относительно не узким, но и не широким туловищем, не короткими, но и не длинными конечностями и т. д.[1].

У мужчин за средние размеры отдельных частей тела для этих типов можно принять следующие:

Отдельные части тела, выраженные в процентах длины тела

Типы пропорций тела	Длина туловища	Ширина плеч	Ширина таза	Длина ноги	Длина руки
Долихоморфный. . .	29,5	21,5	16,0	55,0	46,5
Мезоморфный. . . .	31,0	23,0	16,5	53,0	44,5
Брахиморфный . . .	33,5	24,5	17,5	51,0	42,5

То обстоятельство, что у людей пропорции тела неодинаковые, имеет важное значение в деле конструирования одежды. По этой причине ограничиться при установлении номера (размера) одежды определением только одного какого-нибудь размера тела—продольного, поперечного или, как это некогда было принято в практике швейного дела,—одного периметрового размера (обхвата груди), не представляется возможным.

В практике швейного дела в свое время существовало положение, согласно которому для каждого номера одежды[2] отдельные детали ее изготовлялись строго определенной величины, причем тем большей, чем выше номер одежды. Так, если для 48-го номера одежды длина талии, рукава, брюк и т. д. изготовлялись одной величины, то для 50-го номера эти же детали изготовлялись другой, обычно большей величины, а для 46-го номера, наоборот, меньшей величины, чем для 48-го номера, и т. д. Однако правильно ли это?—Нет, неправильно.

Предположим, что требуется подобрать номера одежды для трех взрослых мужчин, имеющих одинаковый обхват груди, например, 96 *см*, но разные пропорции тела. Пусть у одного субъекта пропорции тела будут долихоморфные, у другого—мезоморфные и у третьего—брахиморфные. Предположим далее, что субъект с долихоморфными пропорциями тела имеет длину тела (рост) в 170 *см*, субъект с мезоморфными пропорциями тела—165 *см*, а субъект с брахиморфными пропорциями тела—155 *см*. В соответствии с данными, приведенными выше (размеры тела, выраженные в % длины тела), абсолютные величины отдельных частей тела у этих субъектов пусть выразятся в следующих величинах:

---

[1] Эти три типа не исчерпывают всего разнообразия в пропорциях тела, но за неимением места на других типах останавливаться мы не будем.

[2] Номер одежды соответствует половине обхвата груди.

Отдельные части тела в абсолютных величинах (в *см*)

Типы пропорций тела	Длина туловища	Ширина плеч	Ширина таза	Длина ноги	Длина руки
Субъект 1-й (долихоморфные пропорции тела)	51,0	36,5	27,5	93,5	78,5
Субъект 2-й (мезоморфные пропорции тела)	51,0	36,0	27,5	87,5	73,5
Субъект 3-й (брахиморфные пропорции тела)	51,0	37,0	27,5	77,5	67,0

Таким образом, по абсолютным размерам туловище как в продольном, так и в поперечном направлениях у всех трех субъектов оказывается более или менее одинаковым. При этих условиях обхват груди может оказаться также одинаковым. Он и равен у всех трех субъектов, как мы отметили выше, 96 *см*.

Поскольку обхват груди у всех трех субъектов оказался одинаковым, мы должны были бы, исходя из положения, отмеченного выше, предложить каждому из них одежду одного размера—48-й размер. Но если отдельные детали одежды для каждого номера будут иметь одну определенную величину, то предложенный 48-й номер одежды будет впору не каждому из наших субъектов. Если он будет впору 2-му субъекту—с мезоморфными пропорциями тела, то он не будет впору 1-му и 3-му субъектам—с долихо- и брахиморфными пропорциями тела. Для субъекта с долихоморфными пропорциями тела рукава, брюки и т. д. будут коротки, для субъекта же с брахиморфными пропорциями тела, наоборот, длинны.

Приведем другой пример. Требуется подобрать номер одежды для трех субъектов, имеющих различные пропорции тела, но одинаковую длину тела, например, 165 *см*. Оставляя процентные соотношения размеров отдельных частей тела к длине тела такими же, как и в предыдущем примере, мы получим для них следующие абсолютные величины.

Отдельные части тела в абсолютных величинах (в *см*)

Типы пропорций тела	Длина туловища	Ширина плеч	Ширина таза	Длина ноги	Длина руки
Субъект 1-й (долихоморфные пропорции тела)	49,5	33,5	26,5	90,5	76,5
Субъект 2-й (мезоморфные пропорции тела)	51,0	36,0	27,5	87,5	73,5
Субъект 3-й (брахиморфные пропорции тела)	54,5	39,5	30,0	84,0	

Так как туловище у 1-го субъекта является более узким, чем у 2-го субъекта, а у 2-го более узким, чем у 3-го субъекта, может оказаться, что обхват груди у 1-го субъекта будет меньше, чем у 2-го, а у этого последнего меньше, чем у 3-го. Ориентируясь на обхват груди, мы должны были бы предложить 1-му субъекту одежду по размерам меньшую, чем 2-му субъекту, а 2-му меньшую, чем 3-му. Предположим, что 1-му субъекту будет предложен 48-й номер, 2-му—50-й номер и 3-му—52-й номер. Но так как отдельные детали одежды у 48-го номера меньше, чем у 50-го, а у 50-го номера меньше, чем у 52-го, естественно, что предложенные размеры одежды не будут впору каждому из наших субъектов. Если 50-й номер будет впору, например, 2-му субъекту, то 48-й номер не будет впору 1-му субъекту, а 52-й номер не будет впору 3-му субъекту. В самом деле, 48-й номер меньше 50-го номера, следовательно, и отдельные детали его имеют размеры меньшие, чем у 50-го номера, но субъект, которому был предложен 48-й номер, имеет ноги и руки более длинные, чем субъект, которому был предложен 50-й номер одежды. Следовательно, брюки и рукава 48-го номера одежды для 1-го субъекта будут малы. Точно так же не будет годиться 52-й номер одежды для 3-го субъекта—брюки и рукава для него будут велики.

Таким образом, ориентироваться при расчетах в крое одежды только на один какой-нибудь размер—продольный, поперечный или периметровый—нельзя. Именно это обстоятельство и понудило конструкторов одежды ввести новый принцип расчетов, согласно которому каждый номер одежды, соответствующий обхвату груди, должен подразделяться на подномера (роста), соответствующие длине всего тела. Насколько целесообразно выделена в качестве второго основного размера длина тела, а не другой какой-нибудь размер (например, длина туловища, длина корпуса и т. д.),—вопрос, который требует специального анализа, поэтому останавливаться на нем мы не будем, но отметим, что принцип установления паспортизации одежды не по одному размеру, как это было некогда, а по двум разнозначащим размерам—по периметру (обхват груди) и по продольному размеру (длина тела)—является, безусловно, более совершенным. При такой постановке дела потребитель скорее найдет себе одежду по „фигуре".

Отмеченные типы пропорций тела встречаются как среди мужчин, так и среди женщин. Но эти типы пропорций тела у обоих полов все же не являются одинаковыми. Пропорции тела у женщин вообще отличаются от пропорций тела мужчин. В чем же заключаются эти различия? Обычно считают, что у женщин относительно шире таз, у́же плечи, длиннее туловище и короче конечности. То, что у женщин относительно шире таз и у́же плечи—верно, но что у женщин относительно длиннее туловище и короче конечности—вопрос, который у многих специалистов вызывал сомнение. И действительно, данные новейших исследований показали, что в относительной длине туловища и конечностей (относительно длины тела) между мужчинами и женщинами разницы почти нет. Согласно имеющимся в Научно-исследовательском институте антропологии материалам, за средние размеры отдельных частей тела, выраженные в процентах длины тела, для женщин мезоморфного типа пропорций тела можно принять следующие:

Размеры отдельных частей тела в процентах длины тела женщин

Длина туловища	Ширина плеч	Ширина таза	Длина ноги	Длина руки
31,2	21,8	17,8	53,1	47,2

Таким образом, половые различия в пропорциях тела у взрослых людей заключаются в основном в том, что у женщин относительно шире таз, а у мужчин—плечи.

Разные пропорции тела встречаются и у детей, причем у детей пропорции тела не те, что у взрослых, и они отличаются от последних тем сильнее, чем меньше возраст ребенка.

До сих пор шла речь о соотношениях так называемых тотальных, т. е. наиболее крупных, размеров тела, к каковым относятся длина тела, длина туловища, рук, ног, поперечников плеч, таза и др. Но не меньшее разнообразие обнаруживается и в соотношениях частичных, т. е. более мелких размерах одной и той же части тела. Так, по соотношению поперечного и продольного размеров стопы можно выделить несколько ее типов. То же относится и к соотношениям поперечного и продольного размеров кисти руки, поперечного и продольного размеров головы и т. д. Эти различия имеют важное значение в деле конструирования обуви, галантерейно-трикотажных изделий (перчатки, носки, чулки), головных уборов и пр.

Изделия, отвечающие по своим размерным соотношениям пропорциям тела, однако, еще не решают вопроса о полной удовлетворенности спроса населения на необходимые размеры. Важную роль в этом отношении играет и ростовочный ассортимент изделий. Дело в том, что разные группы населения отличаются друг от друга не только по пропорциям тела, но и по абсолютным размерам тела. Так, население отдельных районов Советского Союза оказывается более высокорослым или более широкогрудым, чем население других районов. Следовательно, спрос на изделия больших размеров в одних районах будет бо́льшим, в других районах—меньшим и т. д.

Таким образом, многообразие морфологических вариантов в разрезах возрастном, половом и территориальном факторов усложняет вопрос о снабжении населения изделиями нужных размеров и выдвигает специальную задачу рациональной стандартизации последних.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ СТАНДАРТИЗАЦИИ

Проблема рациональной стандартизации размеров предметов личного пользования может получить свое правильное разрешение при условии:

1) установления морфологической типологии той части тела, которая подлежит облеганию данным видом изделия,

2) определения оптимального числа номеров изделий и

3) установления размерного ассортимента изделий в территориальном разрезе.

Каждая из этих задач может решаться различно. Мы остановимся на том пути, который был выбран для этого Институтом антропологии, работающим в соответствующей области по запросам со стороны производственных организаций в течение нескольких лет[1].

1. У с т а н о в л е н и е м о р ф о л о г и ч е с к о й т и п о л о г и и. Для решения первой задачи — установления морфологической типологии, а также для установления взаимосвязи отдельных размеров друг с другом, Институтом антропологии был применен метод корреляции (см. выше, статью Игнатьева М. В.), который, как показали специальные наблюдения, оправдал себя на практике.

Как известно, все предметы личного пользования имеют номерную паспортизацию. Номер изделия соответствует тому размеру тела, который кладется в основу конструирования изделия и кото-

---

[1] Строгое обоснование применяемой в Институте антропологии методики, а также рассмотрение более сложных специальных вопросов приводятся ниже, в статье Игнатьева М. В. „Вопросы построения антропологических стандартов".

рый является ведущим при определении величин всех прочих размерных деталей изделия. Чаще такая паспортизация включает двойную нумерацию—номер и подномер изделия, из которых первый соответствует данному варианту основного размера, а второй—дополнительному размеру, подразделяющему основной размер (номер) на подварианты (подномера). Обычно первый размер и кладется в основу понятия типа, а второй размер — в основу понятия подтипа соответствующей части тела или всего тела в целом.

Выбор основных размеров является одной из наиболее ответственных задач в конструировании изделий и имеет решающее значение для всех последующих этапов построения размерных стандартов. Важное значение имеет и вопрос о числе основных размеров, подлежащих выделению. Так как любая часть тела ориентируется в трех взаимноперпендикулярных плоскостях, казалось бы, что число основных размеров для установления морфологических типов каждой части тела должно соответствовать трем. Однако на практике обычно ограничиваются выделением не более двух размеров, а в некоторых случаях даже и одного размера. Так, в настоящее время в швейном деле выделяют два размера—периметр груди и длину тела; в обувном деле—длину стопы и ширину стопы или обхват через пучки; в деле изготовления чулок и носков—длину следа и обхват через сгиб голенностопного сустава и пятку; при изготовлении же белья (сорочек) — только обхват шеи; при изготовлении головных уборов—только обхват головы и т. д. Ограниченное число выделяемых на практике основных размеров объясняется тем, что каждый новый размер увеличивал бы число морфологических вариантов, а большое число последних крайне усложняло бы процессы изготовления изделия[1].

Какие же размеры следует выделять в качестве основных? Ответ на этот вопрос, по нашему мнению, должна решать степень тесноты связи между размерами. Те размеры, связь которых с прочими размерами является наиболее тесной, и должны служить основными. Этому требованию, как показали специальные исследования, удовлетворяют наиболее крупные, или тотальные, размеры данной части тела. Впрочем, это справедливо в отношении главным образом тех размеров, которые ориентированы с тотальными размерами в одной плоскости. Так, с продольными тотальными размерами лучше увязываются по преимуществу продольные же размеры, с поперечными тотальными размерами—поперечные же размеры и т. д. Это является лишним аргументом в пользу того, что в основе стандартных размеров изделий должен лежать не один, а несколько, минимум два основных размера. В качестве первого основного размера, определяющего тип данной части тела, а в изделии — номер его, следует выбрать тот тотальный размер, связь которого с прочими размерами окажется наиболее тесной. Из дополнительных же размеров, определяющих подтип данной части тела, а в изделии—подномер его, предпочтение нужно отдать тому размеру, который с первым основным размером будет находиться в наименьшей связи, и, наоборот, в наибольшей со всеми теми прочими размерами, которые с первым основным размером связаны недостаточно тесно. Почти всегда такой размер будет ориентирован в иной плоскости, чем первый размер.

---

[1] Более подробно об этом—см. в нашей статье, опубликованной в сборнике „Вопросы стандартизации формы и построения ростовочного ассортимента изделий легкой промышленности". Издание Внитокожобувьмех и МГУ, 1946.

После того как будут выделены основные размеры, необходимо определить число номеров стандарта. Для этого абсолютный размах вариации первого основного размера разбивается на отдельные варианты, предпочтительно по эквидистантному, т. е. равномерному, интервалу. Намеченные варианты и будут служить номерами стандарта. Само собой разумеется, что для разных видов изделий величина интервала между отдельными номерами стандарта будет различной и должна зависеть как от абсолютной величины данного размера, величины его изменчивости, так и от величины интервала безразличия (см. ниже, статью Игнатьева М. В.[1]). Если при всех прочих равных условиях интервалы будут более дробными, то число номеров стандарта будет больше и процент удовлетворенности населения стандартом будет также больше. Однако задача разрешима, и она сводится к определению оптимального числа номеров изделий. Об этом ниже.

При определении числа номеров одновременно устанавливается и число подномеров. Обычно каждый номер разбивается не более чем на 3—5 подномеров.

Выше было отмечено, что для установления связи между отдельными размерами тела Институт антропологии остановился на методе корреляции. Связь между основными размерами устанавливается парной корреляцией, а этих последних со всеми прочими размерами — частной корреляцией. Целесообразность применения метода корреляции находит свое подтверждение не только в ряде теоретических предпосылок, но и в специальных наблюдениях, основывающихся на пригонке и опытной носке различных изделий, изготовленных в соответствии с этими методами.

В процессе работ по стандартизации Институтом антропологии установлены следующие важные положения.

а) Почти все антропометрические признаки как теоретической антропометрии, так и специальной, приуроченной к производственным нуждам, связаны друг с другом прямолинейной корреляцией. Этот факт имеет не только теоретическое, но и крайне важное практическое значение, в особенности в свете тех методических предпосылок стандартизации, о которых речь будет итти ниже. Прямолинейный характер связи антропометрических признаков констатируется не только направлениями эмпирических и теоретических линий регрессий, но и рядом других специальных показателей[2].

б) Несмотря на то, что размеры тела по своим абсолютным значениям в межгрупповом масштабе не одинаковы, связь почти между всеми антропометрическими признаками, по крайней мере, между теми, которые были подвергнуты специальному анализу, везде остается более или менее постоянной. Этот крайне важный факт дает возможность пользоваться унифицированными коэффициентами связи для многих групп населения. Это справедливо в первую очередь в отношении взрослых мужчин и подростковых групп одного и того же возраста, которые подверглись со стороны Института антропологии особенно тщательному изучению. Что же касается женщин и детей младшего возраста, то нет никаких теоретических оснований ожидать и здесь другого положения.

в) Вариационные ряды почти всех антропометрических признаков

---

[1] Стр. 97.

[2] См. выше, стр. 61 и след.

располагаются по кривым, близким к нормальному типу, о чем свидетельствуют не только графические изображения эмпирических кривых, но и вычисление специальных критериев. Это обстоятельство имеет особо важное значение в вопросах, касающихся установления ассортимента изделий.

Так как антропологические признаки связаны друг с другом прямолинейной корреляцией, то имеется полное основание выражать связь между основными размерами, определяющими типологию данной части тела, простейшим уравнением регрессии типа $y = a + bx$, а связь всех прочих размеров с основными размерами—уравнением множественной регрессии типа $y = a + bx + cz$ (см. статью Игнатьева М. В.[1]). Для пользования этими уравнениями при нахождении величины любого размера по любым значениям двух основных размеров нужно знать средние арифметические величины соответствующих размеров и величины коэффициентов приращения искомого размера по двум последним. Поскольку, однако, коэффициенты приращения в соответствующем возрастно-половом межгрупповом масштабе сохраняются более или менее постоянными, размерный стандарт для всех соответствующих групп населения остается постоянным (единым) и может быть установлен по данным лишь одной какой-либо конкретной популяции или по усредненным параметрам нескольких популяций. При таком положении вопрос об особенностях морфологической структуры прочих групп будет сведен к констатации лишь количественного распределения тех вариантов, которые будут иметь место и в едином стандарте. При наличии морфологических особенностей количественное распределение этих вариантов в разных группах, конечно, будет различным. Однако этот вопрос относится не столько к вопросам типологии, сколько к вопросу об ассортименте изделий, о чем речь будет итти ниже.

2. Об оптимальном числе номеров изделий. Вторая задача стандартизации—определение оптимального числа номеров изделий. Это определение основано на закономерности, выражающей зависимость нарастания удовлетворенности от нарастания числа номеров.

При часто встречающемся распределении признаков в населении, близком к нормальному, удовлетворенность сначала быстро возрастает по мере увеличения числа номеров изделия, а затем, по достижении некоторой критической точки, нарастание удовлетворенности настолько замедляется, что дальнейшее увеличение числа номеров делается неэффективным. Поэтому вполне законно поставить вопрос об обслуживании незначительной части населения, размеры признаков которой выходят за определенное число номеров, не продукцией массового производства, а в порядке индивидуальных заказов.

Достижение оптимального числа номеров, при котором их дальнейшее увеличение нецелесообразно, зависит от изменчивости признака и от величины интервала безразличия (промежутков, внутри которых изменчивость признака потребителем не ощущается). Нахождение такого оптимального числа для системы стандартов, построенной по двум основным размерам, отличающимся друг от друга по изменчивости и по интервалу безразличия, сопряжено с известными вычислительными трудностями, но они могут быть в значительной степени преодолены при пользовании составленными в Институте антропологии специальными таблицами, относящимися к различным

[1] Стр. 129.

степеням связи между основными размерами. Эти таблицы дают возможность найти простое решение вопроса об оптимальном числе номеров. В то же время они позволяют найти оптимальные границы классов, а также рассчитать относительные численности номеров в населении (см. ниже, статью Игнатьева М. В.[1]).

3. Установление ассортимента изделий. Расчеты относительной численности номеров среди населения составляют третью и последнюю задачу стандартизации — установление ассортимента. Решение этой задачи облегчается тем, что почти все антропометрические признаки, как это было подчеркнуто выше, располагаются по кривым, близким к нормальным, и поэтому для нахождения численностей вариант достаточно знать лишь среднюю величину признака и его изменчивость в населении. Поскольку изменчивость признаков для данного пола и возраста в территориальном разрезе оказывается более или менее одинаковой, то достаточно определить ее в какой-нибудь одной или нескольких группах и полученные результаты распространить и на другие соответствующие группы. Таким образом, для расчетов относительной численности номеров изделий практически нужно знать лишь средние арифметические величины соответствующих размеров в каждой конкретной группе. Данные об этих величинах можно получить не только непосредственным измерением населения (что было бы всего лучше), но и косвенным путем, используя для этого коэффициенты связи соответствующих признаков с рядом тех признаков теоретической антропометрии, с которыми последние дают достаточно тесную связь и данные о которых в литературе, а также в фондах научных учреждений имеются в значительном количестве и в различных аспектах. Так, с известной приближенностью в производственные размеры могли бы быть переведены следующие размеры теоретической антропометрии:

А. Швейная промышленность

№ п/п	Название размера теоретической антропометрии	Название закройного размера
1	Длина тела	Длина тела (рост)
2	Длина тела	Рост до 7-го шейного позвонка
3	Рост сидя, или длина корпуса	Длина туловища спереди
4	Рост сидя, или длина корпуса	Длина туловища сзади
5	Длина ноги	Длина шага
6	Высота над полом остисто-подвздошной точки	Длина бока

[1] „Вопросы построения антропологических стандартов".

№ п/п	Название размера теоретической антропометрии	Название закройного размера
7	Длина руки	Длина рукава
8	Длина руки	Длина руки по локтю
9	Длина туловища	Длина туловища спереди
10	Ширина плеч	Ширина груди
11	Ширина плеч	Ширина спины
12	Ширина таза	Ширина бедра
13	Обхват (окружность) шеи	Окружность шеи
14	Обхват груди	Окружность груди
15	Обхват талии	Окружность талии
16	Обхват бедра	Окружность бедра
17	Обхват голени	Окружность икры
18	Обхват плеча	Окружность плеча

Б. Обувная промышленность

№ п/п	Название размеров теоретической антропометрии	Размеры деталей обуви
1	Длина стопы	Длина стопы
2	Ширина стопы (плюсневая)	Ширина стопы
3	Высота над полом нижне-берцовой точки	Высота стопы
4	Высота голени	Высота голенища
5	Обхват голени	Окружность икры

№ п/п	Название размеров теоретической антропометрии	Название закройного размера
1	Длина стопы	Длина следа
2	Ширина стопы	Ширина следа
3	Высота над полом верхней берцовой точки	Высота голени
4	Обхват бедра	Окружность бедра
5	Обхват голени	Окружность икры
6	Длина кисти	Длина кисти
7	Ширина кисти	Ширина кисти
8	Обхват головы	Окружность головы

Так как методика измерения размеров теоретической антропометрии отличается от методики измерения производственных размеров и так как локализация антропометрических размеров иная, чем у производственных размеров, последние не будут всецело отвечать первым. В большинстве случаев производственные размеры будут несколько больше, чем антропометрические размеры. Чтобы перевести производственные размеры в антропометрические, нужно знать средние арифметические величины антропометрических и производственных размеров, а также коэффициенты приращения последних размеров по первым. Для примера мы переведем следующие размеры теоретической антропометрии в закройные: длину тела в рост до 7-го шейного позвонка и „антропометрическую“ окружность груди в закройную.

Длина тела — рост до 7-го шейного позвонка. Для установления соответствия длины тела и роста до 7-го шейного позвонка нужно знать: насколько в среднем рост до 7-го шейного позвонка меньше длины тела или какова средняя величина расстояния от макушки головы (верхушечная точка) до шейной точки (остистый отросток 7-го шейного позвонка). Другими словами, нужно знать высоту головы и шеи. Известно, например, что у взрослых мужчин проекционное расстояние от верхушечной точки до шейной точки в среднем равно 22,5 *см*, длина же тела у мужчин в среднем равна 166 *см*. Следовательно, рост до 7-го шейного позвонка у мужчин в среднем равен 143,5 *см*. Однако такая величина роста до 7-го шейного позвонка будет соответствовать лишь среднему значению длины тела. Чтобы установить рост до 7-го шейного позвонка для других значений длины тела, нужно знать не только средние арифметические обоих признаков, но и коэффициент приращения 1-го признака по 2-му признаку или коэффициент приращения высоты головы и шеи по длине тела. Пусть, например, требуется определить рост до 7-го шейного позвонка для мужчин при длине тела в 175 *см*. Чтобы решить эту задачу, рассуждаем следующим образом: при среднем значении длины тела, т. е. при 166 *см*, высота головы и шеи равна 22,5 *см*. Известно, что коэффициент приращения (регрессии) высоты головы и шеи по длине тела у мужчин равен 0,2 *см*, т. е. при изменении длины тела на 1 *см* высота головы и шеи изменяется на 0,2 *см*. Длина тела в 175 *см* больше длины тела в 166 *см* на 9 *см*. Так как на каждый сантиметр изменения длины тела высота головы и шеи изменяется на 0,2 *см*, то при изменении длины тела на 9 *см* высота головы и шеи изменится на 1,8 *см* и при длине тела в 175 *см* будет равна 24,3 *см* (22,5 *см* + 1,8 *см* = 24,3 *см*). Вычитая 24,3 *см* из 175 *см*, мы и получим для данной длины тела рост до 7-го шейного позвонка, т. е. 175 *см* — 24,3 *см* = 150,7 *см*.

Приведем другой пример. Требуется определить рост до 7-го шейного позвонка у мужчин при длине тела в 160 *см*. Применяя те же рассуждения, что и в предыдущем примере, получаем: длина тела в 160 *см* меньше среднего значения длины тела на 6 *см*, а так как на каждый сантиметр изменения длины тела высота головы и шеи изменяется на 0,2 *см*, то при уменьшении длины тела на 6 *см* последняя уменьшится на 1,2 *см*. Следовательно, при длине тела в 160 *см* высота головы и шеи в среднем будет равна 22,5 *см* — 1,2 *см* = 21,3 *см*. Вычитая 21,3 *см* из 160 *см*, мы и получим рост до 7-го шейного позвонка для данного значения длины тела, т. е. 138,7 *см*.

Окружность (обхват) груди „антропометрическая“ — окружность груди закройная. „Антропометрическая“ окружность груди у взрослых мужчин в среднем составляет 88 *см*. Разница между „антропометрической“ окружностью груди и закройной, измеренной по голому телу, в среднем равна 4 *см*. Следовательно, закройная окружность груди, измеренная по голому телу, у мужчин в среднем составляет 92 *см*. Коэффициент приращения закройной окружности груди по „антропометрической“ окружности груди у мужчин равен 0,85 *см*. Пусть требуется узнать, какова будет закройная окружность груди, если „антропометрическая“ окружность груди равна 90 *см*. Рассуждаем следующим образом: при среднем значении „антропометрической“ окружности груди, т. е. при 88 *см*, закройная окружность груди равна 92 *см*. При изменении „антропометрической“ окружности груди на 1 *см* закройная окружность груди изменяется на 0,85 *см*. Следовательно, при изменении „антропометрической“ окружности груди на 2 *см* (90 *см* — 88 *см* = 2 *см*) закройная окружность груди изменится на 1,70 *см* (2 × 0,85), и искомая величина ее при величине „антропометрической“ окружности груди в 90 *см* будет равна 93,7 *см*.

При „антропометрической“ окружности груди в 80 *см* закройная окружность груди будет равна 85,2 *см* и т. д.

Соответствия антропометрических и закройных размеров установлены на группе людей, измеренных без одежды, по обнаженному телу. Поскольку же в практике (например, швейного дела) все измерения производятся поверх легкой одежды, то очевидно, что в соответствующие значения закройных размеров, измеренных по обнаженному телу, должны быть внесены известные поправки за счет одежды. Впрочем, такие поправки могут иметь значение только для дуговых размеров и окружностей. Для продольных размеров они вряд ли существенны. Для закройной окружности груди, высчитанной по „антропометрической“ окружности груди, на одежду следует внести поправку в 3,5—4,0 *см*.

Ввиду того что абсолютные размеры тела в территориальном разрезе оказываются неодинаковыми, ограничиться при установлении ассортимента изделий данными о средних арифметических величинах и об изменчивости соответствующих размеров (основных) не всегда представляется возможным. Так, для расчета относительной численности номеров изделий по крупным областям или по Советскому Союзу в целом необходимо иметь также данные и о взвешенной численности отдельных групп населения. Для этого с успехом могут быть использованы материалы Центрального статистического управления.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ

Изложенный метод стандартизации Институт антропологии применил в работах по установлению размеров обуви, трикотажных изделий, частично одежды и многих других.

Эти работы осуществлялись по заданиям научно-исследовательских институтов кожевенно-обувной промышленности, швейной промышленности, научно-исследовательской лаборатории трикотажной промышленности, Института протезирования и др. В соответствии с этими заданиями были подвергнуты измерениям по специальной программе свыше 50000 взрослых мужчин, женщин, подростков и детей разных территорий и национальностей. Кроме того, был использован материал теоретической антропометрии, включающий еще большее число наблюдений.

Согласно имеющимся аннотациям со стороны производственных организаций на законченные Институтом антропологии работы, последние дали вполне удовлетворительный эффект.

Таким образом, имеется полное основание считать, что Научно-исследовательским институтом антропологии выработана достаточно надежная теоретическая база для правильного решения проблемы стандартизации размеров предметов личного пользования. Впрочем, ряд вопросов этой проблемы все же остается открытым. Для своего разрешения он требует сбора специального антропометрического материала. Но такие работы не могли бы идти успешно, если бы они ставились эпизодически, отдельными учреждениями, как это имело место до последнего времени. Для осуществления необходимо добиться планомерно организованной работы и активной поддержки со стороны Министерства легкой промышленности.

В заключение нельзя не отметить, что многие положения, установленные Институтом антропологии в процессе изложенных работ, далеко выходят за пределы узкой практической значимости и полностью относятся к содержанию теоретической антропологии. В этом отношении особого внимания, как нам кажется, заслуживают следующие факты: расположение почти всех антропометрических признаков по кривым, близким к нормальному типу; прямолинейная связь этих размеров, удовлетворяющая уравнению регрессии типа $y=a+bx$; сходство коэффициентов корреляции в межгрупповом масштабе и т. д. Все эти положения доказаны методами, совсем почти не применявшимися в теоретической антропологии. Впервые в широком масштабе они были применены при решении проблемы стандартизации.

М. В. ИГНАТЬЕВ

ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ АНТРОПОЛОГИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ[1]

Глава 1

ОДНОРАЗМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ СТАНДАРТОВ

§ 1. Удовлетворенность населения и число номеров

Система антропологических стандартов состоит из нескольких образцов или типов, положенных в основу конструкции соответствующих вариантов изделий. Эти образцы могут определяться либо одним каким-нибудь главным, основным размером, что ведет к номерной градации, либо сочетанием двух и более размеров, влекущих дополнительные подномерные градации. В первом случае мы имеем одноразмерную систему стандартов, во втором —двух- или более размерную. Одноразмерная система, несмотря на малую распространенность, заслуживает особого внимания, так как ставит основные вопросы антропологической стандартизации. Естественно с нее и начать рассмотрение теоретической стороны построения антропологических стандартов.

Число размерных стандартов, или типов, не может быть взято произвольно. Какая-то из нескольких возможностей является наилучшей и какое-то число образцов или вариантов—оптимальным. Определение оптимального (наилучшего) количества вариантов является одной из основных задач антропологической стандартизации. Существенным критерием оценки системы стандартов, естественно, служит наибольшая удовлетворенность потребителей размерами вариантов. Это требование ведет к всемерному увеличению числа номеров. Но максимум удовлетворенности потребителей не является единственным критерием системы стандартов. Необходимо достичь наибольшей удовлетворенности при возможно малой затрате материалов и при минимуме производственных расходов. Это требование ведет к уменьшению числа вариантов, ибо при выпуске массовой продукции наибольшая экономия достигается полным однообразием изделий, доведением образцов до единственного числа.

Таким образом, различные подходы к оценке системы размерных стандартов приводят к противоположным требованиям. Потребительский критерий заключается в расширении числа вариантов, производственный — в их сокращении. При этих условиях задача

[1] При ссылках на статью того же автора „Анализ антропометрических данных, применяемых при построении стандартов“, она обозначается знаком (I).

построения наиболее целесообразной системы сводится к примирению противоположных требований. Задача может быть решена на основе закономерности возрастания удовлетворенности населения в зависимости от увеличения количества размерных вариантов, причем под удовлетворенностью мы будем подразумевать относительную численность людей, которым подходят размеры выпускаемых массовой продукцией изделий. Мы будем определять удовлетворенность, исходя из предпосылки о нормальном распределении антропологических признаков, и примем для нее обозначение P (в %). Для примера допустим, что для каких-нибудь видов мужской одежды, определяемых обхватом груди, промежуток между размерами равняется $^1/_2$ среднего квадратического отклонения; это составляет примерно 2 *см*[1]. При одном номере изделий максимум удовлетворенности получится, очевидно, тогда, когда этот единственный номер соответствует среднему обхвату груди[2], который у взрослых русских мужчин равен примерно 88 *см*. Так как, согласно условию, промежуток равен 2 *см*, то можно принять, что границами центрального класса значений обхвата груди будут 87 и 89 *см*, или $M \pm \frac{1}{4}\sigma$. Относительная численность людей, величина признака которых лежит в этих границах, согласно нормальному распределению, равна 19,7%[3]. Следовательно, число людей удовлетворенных размерами изделий при одном номере, будет составлять около 20%, в то время как 80% населения предлагаемый „центральный“ размер изделий будет либо слишком велик, либо слишком мал.

Перейдем теперь к определению удовлетворенности при двух вариантах. Нетрудно убедиться, что при двух номерах максимум удовлетворенности получится, когда один класс имеет среднее значение $M - \frac{1}{4}\sigma$, другой $M + \frac{1}{4}\sigma$ или первый номер 87 *см*, второй — 89 *см*; первый номер подойдет людям, обхват груди которых заключен в пределах от 86 до 88 *см*, второй от 88 до 90 *см*. А всего будут удовлетворены люди в границах от 86 до 90 *см*, или в границах $\pm 0{,}5\sigma$. По таблице или номограмме найдем, что это соответствует 38,3% общего числа группы. Продолжая вычисления, получим следующую таблицу зависимости удовлетворенности потребителей размерами изделий, если расстояние между размерами номеров равно $\frac{1}{2}\sigma$.

Наглядное представление о возрастании удовлетворенности (P), вследствие увеличения числа номеров (N) даст построенный на основании табл. 1 рис. 1.

Приведенные таблица и рисунок обнаруживают отчетливую закономерность: с увеличением количества номеров удовлетворенность населения размерами возрастает весьма быстро, а прирост удовле-

---

[1] Пример не соответствует принятой градации швейных изделий, но приведен для наглядности.

[2] Под этим размером подразумевается обхват груди, измеренный по голому телу по сосковой линии спереди и под лопатками сзади. Он обычно применяется при антропологических исследованиях населения, и по нему имеются обширные наблюдения. „Закройный“ обхват груди у мужчин в среднем на 4 *см* больше, чем упомянутый „антропологический“.

[3] Эту величину можно взять из табл. 19, (I) или получить при помощи номограммы 1 (I).

Таблица 1

Возрастание удовлетворенности размерами изделий при возрастании числа номеров, если разница между номерами равна $^1/_2$

Число номеров (N)	Границы удовлетворенности в $\pm\sigma$	Степень удовлетворенности P (в %)	Приращение удовлетворенности
1	0,25	19,7	19,7
2	0,50	38,3	18,6
3	0,75	54,7	16,4
4	1,00	68,3	13,6
5	1,25	78,9	10,6
6	1,50	86,6	7,7
7	1,75	92,0	5,4
8	2,00	95,5	3,5
9	2,25	97,6	2,1
10	2,50	98,8	1,2
11	2,75	99,4	0,6
12	3,00	99,7	0,3
13	3,25	99,9	0,2
14	3,50	99,95	0,05
15	3,75	99,98	0,03

творенности с каждым новым номером заметно падает. Уже при 7 номерах количество удовлетворенных превышает 90% всего населения, а при 10 номерах удовлетворенность достигает почти 99%. Естественно, что увеличение числа номеров сверх 10 даст совершенно незначительный прирост удовлетворенности; переход от 10 к 11 номерам увеличивает ее на 0,6%, от 11 к 12 — на 0,3% и т. д. Поэтому вполне закономерно поставить вопрос об обслуживании относительно небольшой части населения, размеры признака которой выходят за 10—12 номеров, в порядке индивидуальных заказов, или об организации специальных мастерских нестандартных изделий. В нашем примере это будут размеры, выходящие за пределы отклонений от средних, равные 2,5 или 3 σ, т. е. за границы 78—98 или 76—100 *см*. Разумеется, все это рассуждение справедливо для положения, при котором введение добавочных номеров влечет осложнение производственного процесса.

Рассмотрим еще один случай, а именно когда разница между номерами равна $^1/_4$ σ. Произведя соответствующие расчеты, получим рис. 2 (с теми же обозначениями).

Рисунок показывает, что закономерность носит такой же характер, как и в предыдущем случае, но получаются другие числовые данные. А именно: чтобы численность удовлетворенных размерами людей достигла 90%, требуется не 6 номеров, а 12, т. е. вдвое больше; чтобы удовлетворенность достигла 99%, требуется не 10 номеров, а 20 или 21, т. е. опять вдвое, и т. д. Следовательно, уменьшение промежутка между номерами вдвое влечет увеличение числа номеров тоже в 2 раза. И вообще, когда разница между номерами увеличивается или уменьшается в определенное число раз, то в такое же число раз уменьшается или увеличивается количество номеров, требуемое для заданной степени удовлетворенности. Если разница между номерами становится очень малой, то ступенчатая фигура переходит в плавную кривую линию, которая является предельным выражением зависимости нарастания удовлетворенности от количества вариантов. Она изображена на рис. 1 и 2 плавной линией и дает возможность определить наилучшее число номеров при любом интервале.

§ 2. Интервалы безразличия

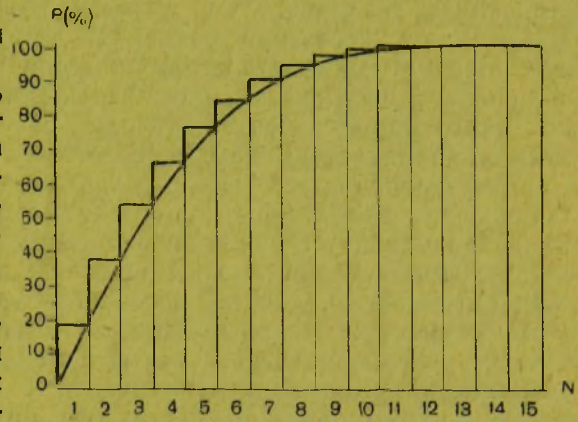


Рис. 1. Число номеров (N) и удовлетворенность (P) (интервал равен $^1/_2\sigma$)

Из изложенного видно, что для нахождения наиболее благоприятного числа номеров весьма существенное значение имеет расстояние между соседними номерами. Этот промежуток не может быть выбран произвольно. При целесообразной системе стандартов он должен устанавливаться с учетом как порога чувствительности потребителя к колебаниям размеров предлагаемого для пользования изделия, так и эластичности материала, из которого оно изготовлено. Для примера обратимся к головным уборам. Если они сделаны из очень жесткого материала, как стальные каски, то разница между номерами должна быть значительно меньше, чем если они выполнены из хорошо растягивающейся резины. Во втором случае порог ощущаемости гораздо больше, чем в первом.

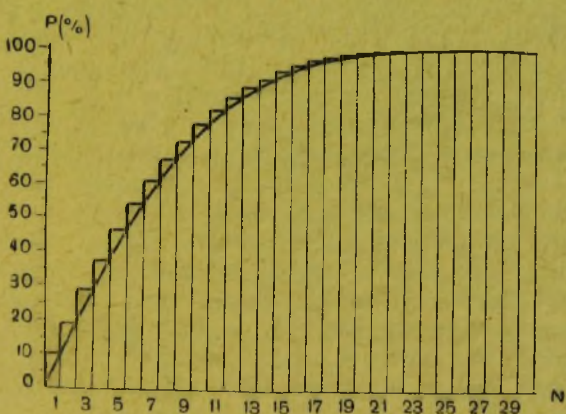


Рис. 2. Число номеров (N) и удовлетворенность (P) (интервал равен $^1/_4\sigma$)

Промежуток, внутри которого разница между размерами изделий не имеет значения для потребителя, называется интервалом безразличия или чувствительности. Понятие интервала безразличия введено в литературу по стандартизации Ю. П. Зыбиным[1].

Наличие подобного интервала подтверждается нашими повседневными наблюдениями. Как бы человек ни был чувствителен к размерам потребляемых им изделий, например, к размерам обуви, он все-таки не будет ощущать различий в ее длине порядка около одного миллиметра или ниже. То же применимо и к другого вида изделиям. Существование конечного интервала безразличия является необходимым условием массового производства изделий. В противном случае, т. е. когда интервал безразличия близок к нулю, массовое производство предметов личного пользования вообще невозможно[2].

[1] Ю. П. Зыбин применяет понятие „предел ощущаемости“, численное выражение которого в два раза меньше интервала безразличия.

[2] Примером таких предметов могут служить зубные протезы и подобные им вещи, требующие индивидуального приспособления.

Различие между размерами соседних номеров должно определяться величиною интервала безразличия. Наилучшее же число номеров обратно пропорционально этой величине: чем меньше интервал безразличия, тем медленнее повышается степень удовлетворенности населения размерами выпускаемых изделий. В этой связи следует отметить важную роль эластичности материалов. Увеличение растяжимости, повышая порог чувствительности, уменьшает число номеров без ущерба для интересов потребителей и тем самым увеличивает выгоды массового производства.

Определение величины интервалов безразличия для каждого вида изделий представляет собою важную задачу, от решения которой зависит построение целесообразной системы номеров. Ее решение требует постановки наблюдений как над человеком, так и над материалами, употребляемыми в том или ином производстве. Правильный ответ задачи может быть найден в результате привлечения к исследованию физиологов и технологов.

Возможно, что величина интервала безразличия при разных значениях размера признака неодинакова; при больших она может быть больше, чем при малых. Возможно также, что границы интервалов безразличия находятся не на одинаковом расстоянии от оптимальной точки; например, может быть, что отклонение от наилучшего размера в сторону превышения более терпимо, чем отклонение в сторону недостижения оптимума. Наконец, не исключены также индивидуальные вариации интервалов безразличия. Все эти обстоятельства подлежат выяснению отдельно для каждого вида изделия. Но пока мы с ними считаться не в состоянии, мы принимаем, что интервалы безразличия на всем протяжении изменений признаков одни и те же для всех людей. Эти допущения положены в основу практики промышленного производства. В настоящее время промышленность пользуется главным образом эмпирически найденными интервалами безразличия. Например, по обхвату груди, принятому для конструирования одежды, интервал составляет 4 *см*, для длины стопы, определяющей размер обуви, — 0,67 *см*, для окружности головы, по которой устанавливаются номера головных уборов, — 1 *см*.

В целях удобства расчетов и сопоставлений интервал безразличия целесообразно выражать в долях среднего квадратического отклонения. Поделенные на сигму интервалы безразличия называются нормированными. Для одежды, конструируемой по обхвату груди, нормированный интервал безразличия равен 1, так как сигма обхвата груди равна примерно 4 *см*, для обуви, построенной на основании длины стопы, сигма которой равна примерно 1,1 *см*, получим примерно 0,6, для головных уборов — тоже 0,6.

Интервал безразличия имеет решающее значение для построения целесообразной системы антропологических стандартов применительно к большому числу видов изделий, но не ко всем. Следует различать два случая: интервал безразличия ограничен либо с обеих сторон, либо лишь с одной. В первом случае людям, имеющим определенный размер признака, подойдут изделия соответствующей величины с некоторыми неощутимыми отклонениями в ту и другую сторону. Например, если длина стопы у кого-нибудь равна 260 *мм*, то ему подойдет обувь, сшитая точно по этому размеру, но он не будет ощущать неудобств и от обуви, сшитой на размер 261 или 259 *мм*. Однако обувь, предназначенная для стопы 263 или 257 *мм*, будет ему уже непригодна. Словом, подходить будут изделия внутри определенных размеров.

К такому же типу изделий, для конструирования которых необходимо исходить из определенного с обеих сторон интервала, принадлежат некоторые швейные изделия, головные уборы, кожаные перчатки и т. п.

В других случаях интервал безразличия ограничен лишь с одной стороны. Вещь не может быть меньше определенного размера, другая граница строго не определена. Имеется в виду, что вещь, рассчитанная на большой размер, подойдет к людям значительно меньшего размера. Примером такого рода изделий, которыми приходилось заниматься Институту антропологии, служат поясные ремни. Сюда же с известным приближением относятся и некоторые виды верхнего платья, при возможности их переделки из большого размера в малый.

Ради удобства изложения мы будем называть изделия с ограниченным с двух сторон интервалом безразличия I видом и ограниченным с одной стороны — II видом.

§ 3. Число номеров при заданной степени удовлетворенности размерами изделий I вида (когда интервал безразличия ограничен с двух сторон)

Если удовлетворенность задана, то для нахождения соответствующего ей числа номеров нужно знать всего две величины: размах изменчивости признака в пределах данной степени удовлетворенности и величину интервала безразличия. Требуемое число номеров равно частному от деления размаха изменчивости на интервал безразличия. Для примера обратимся к табл. 1. Допустим, что дана степень удовлетворенности 99%. Из таблицы видно, что соответствующий размах изменчивости находится в пределах от $-2{,}5\sigma$ до $+2{,}5\sigma$, т. е. равен 5σ. Нормированный интервал безразличия составляет $\frac{1}{2}\sigma$. Делим одну величину на другую, $5 : \frac{1}{2}$, получаем, что искомое число номеров равно 10. Как видно, вопрос сводится к нахождению размаха изменчивости, соответствующего заданной степени удовлетворенности.

Зависимость размаха изменчивости от степени удовлетворенности при нормальном распределении признака выражается функцией, значения которой приводятся в табл. 2 [1].

График функции дается на рис. 3.

Приведенный график, так же как и упомянутая таблица, служит для отыскивания наименьшего числа номеров, при котором может быть достигнута данная степень удовлетворенности. Пусть, например, расстояние между номерами равно $\frac{1}{2}\sigma$ и задана удовлетворенность 90%. По рисунку или таблице мы найдем, что размах изменчивости равен примерно $3{,}3\sigma$; деля на интервал между номерами, т. е. на $\frac{1}{2}\sigma$, полу-

---

[1] Это — функция, обратная интегралу вероятности,

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Зависимость размаха изменчивости в σ от степени удовлетворенности (составлено в Институте антропологии)[1]

P (в%)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00	0,03	0,05	0,08	0,10	0,13	0,15	0,18	0,20	0,23
10	0,25	0,28	0,30	0,33	0,35	0,38	0,40	0,43	0,46	0,48
20	0,51	0,53	0,56	0,59	0,61	0,64	0,66	0,69	0,72	0,74
30	0,77	0,80	0,83	0,85	0,88	0,91	0,94	0,96	0,99	102
40	1,05	1,08	1,11	1,14	1,17	1,20	1,23	1,26	1,29	1,32
50	1,35	1,38	1,41	1,45	1,48	1,51	1,54	1,58	1,61	1,65
60	1,68	1,72	1,76	1,79	1,83	1,87	1,91	1,95	1,99	2,03
70	2,07	2,12	2,16	2,21	2,25	2,30	2,35	2,40	2,45	2,51
80	2,56	2,62	2,68	2,74	2,81	2,38	2,95	3,03	3,11	3,20
90	3,29	3,39	3,50	3,62	3,76	3,92	4,11	4,34	4,65	5,15
99	5,15	5,22	5,30	5,40	5,50	5,62	5,76	5,94	6,18	6,58

чим 6,6 или, округляя, 7 номеров, как это и было найдено ранее по табл. 1. Для второго примера примем, что интервал равен $\frac{1}{4}\sigma$, а удовлетворенность 99%. Обращаясь к таблице, найдем, что размах равен 5,15 σ, деля на $\frac{1}{4}\sigma$, получим 20,60 или, округляя, 21 вариант и т. д.

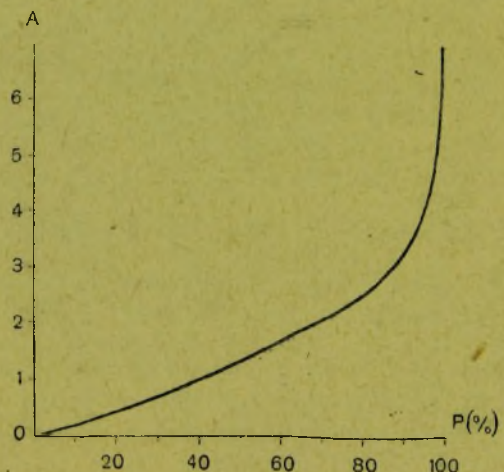


Рис. 3. Удовлетворенность (P в %) и размах изменчивости в σ (A)

§ 4. Лучшие размеры вариантов (I вид изделий)

Полученное по предыдущему параграфу число номеров является наименьшим из чисел, дающих заданную удовлетворенность. Оно может быть названо наилучшим в том смысле, что наиболее выгодно при массовом производстве. Но мало определить число номеров;

---

[1] Удовлетворенность приводится в целых процентах от 0 до 99, а сверх 99% — с одним десятичным знаком. Размах изменчивости находится на пересечении горизонтальной строки, обозначающей десяток процента удовлетворенности (0,10,20 и т. д.) и вертикального столбца с обозначением единицы процента. Например, удовлетворенности 53% соответствует размах, находящийся на пересечении строки 50 столбцом 3 и равный 1,45σ. Размах, соответствующий удовлетворенности 99,0; 99,1; 99,2 и т. д., находится в последней строке таблицы.

чтобы достичь наибольшей удовлетворенности, возможной при данном числе номеров, нужно, чтобы размеры изделий были определены не произвольно, а надлежащим способом. Прием нахождения лучших (оптимальных) размеров вариантов в зависимости от их числа показан на примере § 1. Правило заключается в следующем: при нечетном числе номеров средняя величина признака соответствует среднему номеру изделия, при четном же числе номеров средняя величина признака не будет представлена в системе стандартов, но будут два номера, примыкающих к средней величине, один — на половину интервала безразличия больше, другой—на такую же величину меньше среднего размера. В качестве иллюстрации допустим, что для каких-нибудь швейных изделий принято 7 номеров с интервалами 2 *см*, при среднем обхвате груди 88 *см* и среднем квадратическом отклонении 4 *см*. Тогда номера должны соответствовать таким размерам груди:

Таблица 3

Размеры номеров (в *см*)

Номера . . .	1	2	3	4	5	6	7
Размеры . .	82	84	86	88	90	92	94

Центральным номером является 4-й.

Если же в систему стандартов вошло 6 номеров, то средних классов будет два, а именно 3-й и 4-й, и номера будут соответствовать таким размерам:

Таблица 4

Размеры номеров (в *см*)

Номера	1	2	3	4	5	6
Размеры	83	85	87	89	91	93

Разумеется, приведенные цифры преследуют лишь иллюстративную цель. На них можно показать наличие погрешности, получающейся вследствие неправильного определения размеров номеров. Так, в последнем случае (при 6 номерах) удовлетворенность достигает 87%[1]. Если же взять 6 номеров, откинув первый или последний в системе из 7 номеров, то удовлетворенность будет всего 85%[2].

Разница не велика, но показывает, что размеры номеров отнюдь не являются безразличными для достижения наибольшей удовлетворенности, если даже интервал безразличия и число вариантов определены правильно.

Следует привести еще один пример погрешности, получающейся вследствие неправильного определения размеров вариантов. Мы имеем в виду случаи, когда расстояния между номерами не равны интервалам безразличия.

Представим себе, что условия производства допускают изготовление лишь определенного числа номеров, например, пяти, и что

[1] В самом деле, размах удовлетворяемой изменчивости от 82 до 94 *см* равен 12 *см* $= 3\sigma$; удовлетворенность, соответствующая этому размаху, равна 0,87.

[2] По таблице 20, (I) удовлетворенность равна $\Phi\left(\frac{93-88}{4}\right) - \Phi\left(\frac{81-88}{4}\right) = 0{,}85$.

изделие определяется размерами грудной клетки взрослых мужчин. Размах колебаний этого признака составляет, примерно, от 75 до 100 *см* (выходящие за такие пределы величины встречаются в СССР крайне редко, реже чем 1 раз на тысячу). Поэтому можно предложить разделить этот размах на 5 частей и получить 5 номеров, покрывающих амплитуду изменчивости. Номера, промежутки признаков, для которых предназначены эти номера, а также средние размеры номеров даются в прилагаемой таблице.

Таблица 5

Номера и размеры (в *см*)

Номера	1	2	3	4	5
Размеры признака	75—80	80—85	85—90	90—95	95—100
Размеры номеров	77,5	82,5	87,5	92,5	97,5

Как видно из таблицы, разница между размерами соседних номеров равна 5 *см*, поэтому, если интервал безразличия тоже равен 5 *см*, то практически достигается полная удовлетворенность населения. Совсем другое получится, если интервал безразличия меньше 5 *см*; пусть он равен 4 *см*. В таком случае изделия подойдут лишь категориям людей с размерами, примыкающими к средним значениям приведенных номеров и отступающими от них не более чем на 2 *см*. Эти группы людей имеют следующие размеры грудной клетки:

Таблица 6

Номера и размеры (в *см*)

Номера	1	2	3	4	5
Размеры груди	75,5—79,5	80,5—84,5	85,5—89,5	90,5—94,5	95,5—99,5

В распределении признака получаются зияния или разрывы, как это видно на предлагаемом рисунке 4.

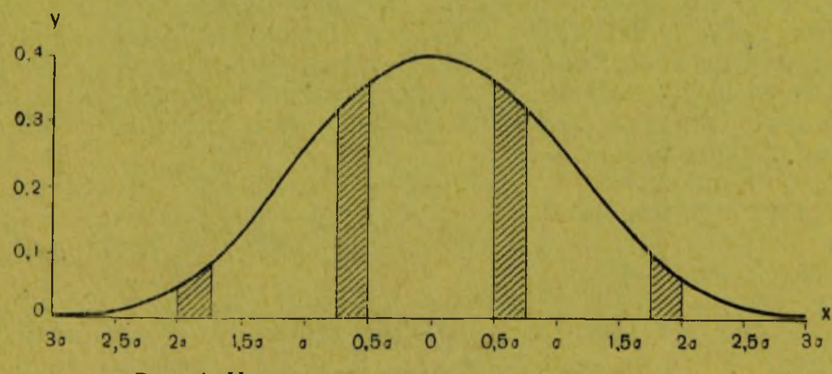


Рис. 4. Нормальное распределение с разрывами

Затушеванные части фигуры соответствуют частям населения, не удовлетворенным размерами изделий. Общее число удовлетворенных подсчитаем по данным табл. 6 при помощи таблицы или номограммы нормального распределения, для чего границы интервалов табл. 6 выразим в долях среднего квадратического отклонения и затем определим численности классов.

Как видно, получается 80% удовлетворенности. Между тем, если взять 5 центральных (примыкающих к средней арифметической) номеров с интервалами 4 *см*, то они дадут размах изменчивости 5 σ, что приводит к удовлетворенности в размере 99%[2]. Следовательно, погрешность из-за нецелесообразного определения размеров вариантов составляет очень заметную величину: 19%.

Таблица 7

Численности классов [1]

Классы в σ	Численности в %
От −3,125 до −2,125	1,7
„ −1,875 „ −0,875	16,0
„ −0,625 „ +0,375	38,0
„ +0,625 „ +1,625	21,4
„ +1,875 „ +2,875	2,8
Итого. .	79,9

Просчет удовлетворенности в результате расхождения между интервалами размеров изделия и интервалами безразличия имеет место лишь в том случае, когда первая величина больше второй. В том же случае, когда расстояние между номерами меньше, чем интервал безразличия, и число номеров достаточно велико, неудовлетворенности может и не быть. Но такой подход противоречит требованию экономии производства изделий. Выгоды массового производства будут использованы недостаточно: излишняя детализация системы размерных стандартов, не давая никаких преимуществ потребителям, приводит к осложнению производства и распределения изделий.

§ 5. Зависимость расхода материала на единицу изделия от числа номеров

В предыдущих расчетах оставался в стороне вопрос об изменении количества материала, идущего на изготовление изделий при изменении числа их номеров. Между тем эта сторона дела может представлять интерес, в виду того, что в некоторых случаях приближение к оптимуму обозначает увеличение расходов на единицу изделия; с точки зрения экономики и технологии при известных обстоятельствах это должно быть принято во внимание. Поэтому перед теорией антропологической стандартизации ставится задача установления зависимости количества затрачиваемого на производство изделий материала от числа номеров. Чтобы рассмотреть вопрос в наиболее общем виде, примем, что первоначально производится лишь один самый малый вариант, дающий минимум расходов на единицу изделия, а затем число размерных вариантов или номеров постепенно возрастает. Для простоты мы будем считать, что количество материала пропорционально величине основного признака. В таком случае рассмотрение вопроса приводит к излагаемым ниже выводам.

а) Расход материала на единицу изделия при производстве n номеров в количествах, пропорциональных численностям людей, которым подходят размеры этих номеров, выражается через $M - 0{,}01M(t_n)\sigma$, где t_n — нормированное значение (т. е. отклонение от

[1] По номограмме 1 или табл. 20, (I).

[2] По таблице 2.

средней, деленное на сигму), относящееся к самому большому n-му номеру, а $M(t_n)$—вспомогательная величина, значения которой даются в таблице 8[1].

Таблица 8

Значения величины $M(t)$ (вычислено в Институте антропологии)

t_n	$M(t_n)$	t_n	$M(t_n)$	t_n	$M(t_n)$
—3,00	328,2	—0,75	132,9	1,50	13,9
—2,75	305,0	—0,50	114,1	1,75	9,0
—2,50	282,3	—0,25	96,4	2,00	5,5
—2,25	259,6	0,00	79,8	2,25	3,2
—2,00	237,3	0,25	64,6	2,50	1,8
—1,75	215,4	0,50	50,9	2,75	0,9
—1,50	193,9	0,75	38,9	3,00	0,4
—1,25	172,9	1,00	28,8		
—1,00	152,5	1,25	20,4		

б) Процентное отношение расхода материала на единицу изделия к исходному расходу (на наименьший номер) выражается формулой[2]:

$$\left(100 + \frac{328{,}2\,\sigma - M(t_n)\,\sigma}{M - 3{,}282\,\sigma}\right)\% . \qquad (1)$$

Для иллюстрации применим выведенную формулу к производству верхней одежды. Будем считать, что расход материалов в основном определяется ростом, и примем для взрослого мужского населения $M = 165$ *см*[3], $\sigma = 6$ *см*, так что $M = 27{,}5\sigma$. Наименьший рост равен 147 *см*, интервалы между номерами равны 6 *см*. Последовательные значения t равны: $t_1 = -3$, $t_2 = (153 - 165):6 = -2$, $t_3 = (159 - 165):6 = -1$, $t_4 = 0$, $t_5 = 1$ и т. д. Беря из табл. 8 соответствующие этим t значения $M(t_n)$, подставляя их в формулу (1) и принимая $M = 27{,}5\,\sigma$, получим табл. 9, показывающую, как должно увеличиваться количество расходуемого материала при увеличении числа номеров (расход на единицу наименьшего изделия принят за 100).

Таблица 9

Число номеров и количество материала на единицу изделий (при переходе от малого размера к большим) для верхней мужской одежды, минимум = 100

Число номеров	Количество материала	Скорость нарастания за номер	Число номеров	Количество материала	Скорость нарастания за номер
1	100	—	4	110,3	3,0
2	103,8	3,8	5	112,4	2,1
3	107,3	3,5	6	113,3	0,9

[1] $M(t) = 100 \int_{-\infty}^{t} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt : \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 200\, f(t) : [1 \pm F(t)]$, причем + стоит, если $t > 0$, —, если $t < 0$. Значения $f(t)$ и $F(t)$ берутся из таблиц 18 и 19 первой нашей статьи.

[2] В качестве наименьшего размера принимается $M - 3\sigma$ (меньшие величины признака встречаются примерно 14 раз на 10 000 населения), поэтому $t_1 = 3$, и так как $M(t_1) = 328{,}2$, то искомое отношение равно $[M - 0{,}01 M(t_n)\,\sigma] : (M - 3{,}282\sigma)$, что приводит к формуле текста.

[3] См. сноску на стр. 16.

Из таблицы видно, что с увеличением числа номеров скорость нарастания количества материала на единицу изделия непрерывно падает, причем особенно значительное падение наблюдается по достижении пяти номеров. Но при пяти номерах, наибольший из которых соответствует росту 171 *см*, все еще останется неудовлетворенными 16,3% населения; чтобы практически ликвидировать эту неудовлетворенность, потребуется увеличение расхода материала менее чем на 1%. Этот расчет показывает, что для весьма значительного повышения удовлетворенности бывает достаточно лишь сравнительно малого увеличения расхода материалов.

Для второго примера обратимся к производству мужских головных уборов. Будем считать, что средняя окружность головы у мужчин равна 56 *см*, среднее квадратическое отклонение 1,6 *см* (так что $M = 35\sigma$) и разница между номерами 1 *см*. За наименьший размер примем 51 *см*; последовательные значения t будут $t_1 = -3$ (в этом случае допущено округление), $t_2 = -2{,}5$, $t_3 = -1{,}825$, $t_4 = -1{,}25$ и т. д. Произведя соответствующие подстановки в формулу (1), получим таблицу 10, показывающую, как увеличивается количество расходуемого материала[1].

Таблица 10

Число номеров и количество материала на единицу изделия (при переходе от малого размера к большому); минимум = 100

Число номеров	Количество материала	Скорость нарастания на номер
1	100,0	—
2	101,4	1,4
3	103,2	1,8
4	104,9	1,7
5	106,5	1,6
6	107,8	1,3
7	108,9	1,1
8	109,7	0,8
9	110,1	0,4
10	110,3	0,2
11	110,3	0,0

Из таблицы видно, что скорость нарастания количества материала по достижении трех номеров непрерывно падает, а после восьми номеров приращение материала почти прекращается.

Все это говорит о том, что добавочный расход материала вовсе не столь значителен, как это может показаться, и во всяком случае его повышение по своим темпам совершенно несравнимо с ростом удовлетворенности населения.

Итак, если уже сделан один или два шага по направлению к дифференциации изделий, то нет оснований ограничиваться малым набором изделий. Почти полная удовлетворенность населения потребными вариантами будет достигнута при относительно небольшом увеличении производственных расходов, если, разумеется, число образцов не лимитируется условиями оборудования предприятий и какими-либо иными обстоятельствами технического порядка.

§ 6. Число номеров изделий II вида (когда интервал безразличия ограничен с одной стороны)

Приближение к оптимальному числу номеров не всегда сопровождается увеличением количества материала, идущего на изготовление изделий. В частности, уменьшение материала имеет место тогда, когда интервал безразличия ограничен лишь с одной стороны,

---

[1] Причем для нахождения $M(t_3)$, $M(t_5)$, $M(t_7)$ и $M(t_9)$ производится обычная табличная интерполяция.

и увеличение числа вариантов заключается в переходе от крупных номеров к малым. В практике Института антропологии такой пример, как отмечалось, имел место с поясными ремнями. Если выпускать ремни лишь одного большого размера, то будет удовлетворено все население, нуждающееся в этом изделии. Однако для весьма значительной его части пояса будут иметь большой излишек длины (нерабочую часть), что в интересах разумного расходования материала нежелательно. С другой стороны, если набор очень дифференцирован, то это влечет за собой известные трудности для производства и распределения продукции. Спрашивается, до какой степени целесообразно итти по линии увеличения числа номеров. Для того чтобы задача поддавалась решению, на границы номеров необходимо наложить определенное условие. Что, например, должен обозначать переход от одного варианта к двум? Для одного единственного номера можно условиться, чтобы его размер отстоял от средней величины признака на 3σ, чему соответствует примерно 99,9% удовлетворенности, но какова должна быть величина другого номера? Должен ли он равняться средней величине соответствующего размера, быть больше ее или меньше? Таков вопрос, стоящий перед теорией антропологической стандартизации. Его решение определяется требованием достичь минимума затраты материала без ущерба для удовлетворенности населения размерами изделий. Это условие делает задачу вполне определенной: размер второго номера нужно взять так, чтобы при полной удовлетворенности был достигнут минимум расхода материалов. Такое условие приводит к математически формулируемой задаче. Ее решение (при допущении, что количество материала пропорционально средней величине основного признака) дает излагаемые ниже результаты[1].

Таблица 11

Наиболее выгодные размеры и численности 2-х номеров

Номера	Размеры	Численности (в %)
1	$M + 0{,}665\,\sigma$	74,7
2	$M + 3{,}000\,\sigma$	25,3

а) При делении размаха изменчивости на две части наиболее выгодными размерами и численностями номеров являются приводимые в табл. 11.

б) Расход материалов на единицу изделия составляет при этом $M + 1{,}256\sigma$.

в) По отношению к максимальному расходу на единицу изделия, получающемуся при выпуске одного большого номера, это дает

$$\left(100 - \frac{174{,}4\,\sigma}{M + 3\sigma}\right)\%, \tag{2}$$

и достигаемая экономия равна

$$\frac{174{,}4\,\sigma}{M + 3\,\sigma}\,\%. \tag{2'}$$

---

[1] Приводим решение в кратком виде. Условие задачи аналитически записывается так:

$$(M + x)\Phi(x) + (3 + M)\,[1 - \Phi\,(x)] = \min\ (x \text{ — искомый размер номера}).$$

Значение символа $\Phi(x)$ см. табл. 20, (1). Из заданного условия после дифференцирования вытекает:

$$(M + x)\,f(x) + \Phi(x) - (3 + M)\,f\,(x) = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет $x = 0{,}665$ и, следовательно, $\Phi(x) = 0{,}747$.

Расход на единицу изделия находится элементарным способом: помножением размеров на численности (в табл. 11) и последующим суммированием.

Из формулы (2') видно, что эффективность введения второго размера зависит от соотношений среднего квадратического отклонения и средней величины признака: чем больше изменчивость, тем больше достигаемая экономия. В частном случае, относящемся к поясным ремням, известно, что $M = 15{,}4\sigma$. Подставляя это выражение в формулу (2'), найдем, что экономия составит 9,5%.

Естественно возникает вопрос о том, с какой скоростью уменьшается расход на единицу изделия при дальнейшем возрастании числа номеров. Решение этой задачи приводит к следующим результатам:

а) При делении размаха изменчивости на три части наиболее выгодными размерами и численностями номеров являются приводимые в табл. 12 [1].

б) Расход материалов на единицу изделия равен при этом $M + 0{,}806\sigma$, что по отношению к максимальному расходу составляет

$$\left(100 - \frac{219{,}4\ \sigma}{M + 3\ \sigma}\right)\%. \quad (3)$$

Таблица 12

Размеры и численности трех номеров

Номера	Размеры	Численности (в %)
1	$M - 0{,}064\ \sigma$	47,4
2	$M + 1{,}127\ \sigma$	39,6
3	$M + 3{,}000\ \sigma$	13,0

в) При делении размаха изменчивости на четыре части наиболее выгодными размерами и численностями являются приводимые в табл. 13 [2].

г) Расход материалов на единицу изделия равен при этом $M + 0{,}576\sigma$, что по отношению к максимальному расходу составляет

$$\left(100 - \frac{242{,}4\ \sigma}{M + 3\ \sigma}\right)\% \quad (4)$$

Таблица 13

Размеры и численности четырех номеров

Номера	Размеры	Численности (в %)
1	$M - 0{,}463\ \sigma$	32,1
2	$M + 0{,}431\ \sigma$	34,5
3	$M + 1{,}379\ \sigma$	25,0
4	$M + 3{,}000\ \sigma$	8,4

д) Можно заметить, что по мере увеличения числа номеров деление размаха изменчивости все более приближается к равномерному. Поэтому, опуская промежуточные стадии, перейдем к пределу, к которому стремится расход на единицу изделия при увеличении числа

---

[1] Размеры номеров определяются из условия

$$(M + x_2)\ \Phi_{-\infty}^{x_2} + (M + x_1)\ \Phi_{x_2}^{x_1} + (M + 3)\ \Phi_{x_1}^{\infty} = \min,$$

где

$$\Phi_a^b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

x_i — искомый размер i-го номера.

[2] Размеры номеров определяются из условия

$$x_3\ \Phi_{-\infty}^{x_3} + x_2\ \Phi_{x_3}^{x_2} + x_1\ \Phi_{x_2}^{x_1} + 3\ \Phi_{x_1}^{\infty} = \min.$$

номеров. Он равен M. Его отношение к максимальному расходу составляет

$$\left(100 - \frac{300\sigma}{M + 3\sigma}\right)\%. \qquad (5)$$

Чтобы иллюстрировать приводимые формулы, обратимся к тому же случаю с поясными ремнями. Для таких видов изделия, согласно приведенному выше, $M = 15{,}4\sigma$. Подставляя это выражение в формулы (2), (3), (4) и (5), получим табл. 14.

Таблица 14

Число номеров и количество материала на единицу изделий (при переходе от большого размера к малым); максимум = 100 [1]

Число номеров	Количество материала
1	100,0
2	90,5
3	88,1
4	86,8
....	....
Предел	83,7

Графическое изображение зависимости расходуемого на единицу изделия материала от числа номеров приводится на рис. 5.

Из таблицы и из рисунка видно, что самой большой экономией сопровождается переход от одного номера к 2-м; он сразу дает 9,5%. Переход от 2-х номеров к 3-м влечет уже значительно меньшее сокращение расходов, переход от 3-х к 4-м номерам еще менее ощутителен, а после 5 или 6 номеров дальнейшее увеличение их числа вообще не сопровождается сколько-нибудь заметной экономией. Следовательно, уже 3-номерная система дает удовлетво-

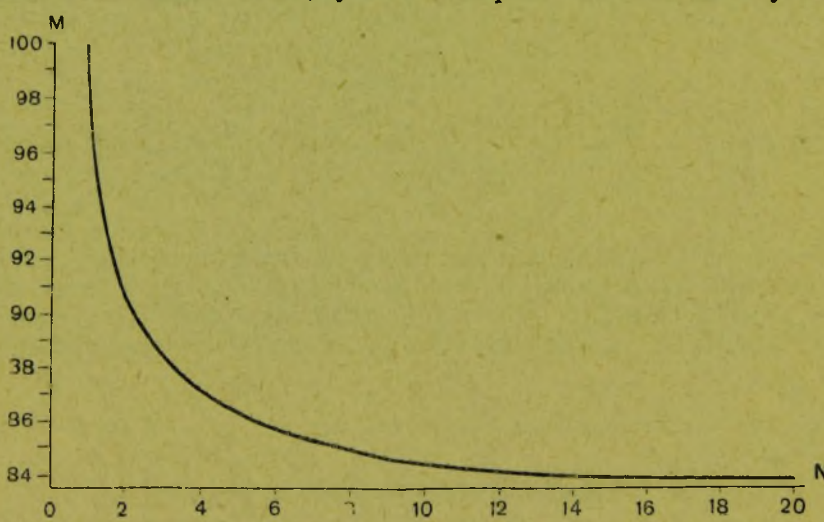


Рис. 5. Число номеров (N) и количество материала (M)

рительные результаты, а 5 и 6-номерная — вполне хорошие. Слишком же дифференцированный набор, если он осложняет производство или распределение, оказывается ненужным.

---

[1] Эта таблица приведена в нашей статье „Способы построения рационального ассортимента изделий личного пользования" в сборнике „Вопросы стандартизации формы и построения ростовочного ассортимента изделий легкой промышленности", М., 1946, стр. 50. Небольшие расхождения объясняются уточнениями, внесенными в настоящем издании.

Для другого примера обратимся к верхней одежде, при условии, что она допускает переделку из большой в малую. Спрашивается, насколько понизится расход материалов при переходе от одного самого большого варианта к двум, трем и т. д. вариантам? Считая, что расход материалов в основном определяется ростом и принимая для взрослого мужского населения попрежнему по длине тела $M = 165$ *см* и $\sigma = 6$ *см*; после подстановки этих чисел в формулы (2), (3), (4) и (5) получим результат, приводимый в табл. 15.

Из таблицы видно, что наибольшее действие имеет переход от одного номера к двум. В дальнейшем уменьшение расхода при увеличении числа номеров идет медленнее. Но значительное увеличение числа номеров само по себе меняет положение, так как интервал безразличия становится тогда ограниченным с двух сторон, и задачу об оптимальном числе номеров удобнее решать применительно к 1 виду.

Таблица 15

Число номеров и относительное количество материала на единицу изделия (для одежды, конструируемой по росту; максимум = 100

Число номеров	Количество материала
1	100
2	94
3	93
4	92
....	....
Предел	90

§ 7. Обобщения

Задача отыскания наилучшего (оптимального) числа вариантов или номеров изделий личного пользования (предназначенных для облегания тех или иных частей человеческого тела) и выпускаемых массовой продукцией, имеет следующую общую формулировку (для случаев, когда номер определяется одним размером):

найти наименьшее число номеров при заданной удовлетворенности населения размерами изделий и достичь наибольшей экономии расходования материалов на изготовление изделий без ущерба для удовлетворенности потребителей.

Поставленная задача принимает разные формулировки применительно к различным конкретным положениям. Но она всегда сводится к тому, чтобы установить наилучшее соотношение между размерами изделий и величинами облегаемых ими частей тела. Количественным выражением соответствия служит степень удовлетворенности населения размерами изделий, т. е. относительная численность людей, которым подходят составляющие набор варианты, а при заданной степени удовлетворенности наименьший расход материалов на изготовление изделий. Эти количественно выражаемые критерии делают задачу доступной для математического анализа.

Решение задачи зависит от интервала безразличия или от промежутка между величинами изделий, внутри которого потребитель не ощущает их изменений.

Можно выделить два вида изделий. В одних случаях интервал безразличия ограничен с двух сторон: вещь заданного размера подходит только тем людям, размеры признака которых лежат внутри определенных границ. В других случаях интервал безразличия определен лишь с одной стороны: вещь не может быть меньше определенного предела; другая же граница почти открыта, и изделие, рассчитанное на большую величину признака, подойдет к людям с значительно меньшими размерами. Когда интервал безразличия ограничен с обеих сторон, то задача антропологической стандартизации состоит в разрешении противоречия между двумя противоположными стремлениями. Одно стремление заключается в росте числа номеров для наиболее полного удовлетворения населения размерами изделий, другое—в уменьшении числа номеров в целях использования выгод массового производства. Противоречие разрешается на основе существующей закономерности возрастания удовлетворенности населения в зависимости от увеличения числа номеров. Эта закономерность есть следствие близкого к нормальному распределения антропометрических размеров и проявляется в простейшем виде, когда интервалы безразличия одинаковы на всем протяжении изменчивости признака. Согласно указанной закономерности удовлетворенность населения с увеличением числа номеров сначала быстро возрастает, а затем увеличение числа номеров дает все меньше и меньше прибавки удовлетворенности; наступает предел, когда массовое производство новых размеров уже себя не оправдывает. Исходя из закономерности связи между числом номеров и удовлетворенностью населения, можно решить следующие задачи:

а) найти наименьшее число номеров, при котором достигается заданная степень удовлетворенности населения размерами вариантов изделий,

б) найти наибольшую степень удовлетворенности, достижимую при заданном числе номеров.

Эти задачи очень просто решаются при помощи таблиц 18—20 (I) и табл. 2 или рис. 2. Они требуют знания средней величины и среднего квадратического отклонения соответствующего признака, а также интервала безразличия.

Когда интервал безразличия ограничен лишь с одной стороны, задача антропологической стандартизации сводится к отысканию того минимального числа номеров, при котором практически достигается наименьший расход материалов на производство изделий. Решение этой задачи дается формулами и таблицами предыдущего параграфа. Для большинства изделий искомое число номеров невелико, порядка 3-х или 4-х.

Другие задачи антропологической стандартизации требуют рассмотрения двух- и многоразмерных систем стандартов.

Глава II

ДВУХ- И МНОГОРАЗМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ СТАНДАРТОВ

§ 1. Выделение двух основных размеров и связанные с ним вопросы

Антропологические стандарты обычно представляют собою сочетания многих размеров. В некоторых случаях один из этих размеров выделяется, как основной или главный. Он определяет номер изделий независимо от других размеров; остальные размеры приводятся в соответствие с первым и являются подчиненными. Однако обычно не ограничиваются выделением лишь одного главного размера. Необходимо принимать во внимание хотя бы еще один основной признак. Так, при построении стандартов для обуви недостаточно брать в качестве одной независимой переменной длину стопы; нельзя игнорировать также ее ширину или полноту. При построении ассортимента одежды нельзя ограничиваться лишь вариациями обхвата груди, необходимо учесть самостоятельную изменчивость другого размера, длину туловища или длину тела и т. д. Целесообразное конструирование изделий и построение надлежащего их ассортимента зависит по крайней мере от двух основных размеров. Один из них определяет номера, другой—подномера изделий. Размерными вариантами, носящими название типов или стандартов, являются сочетания номеров и подномеров [1].

Когда мы имели дело с одним размером, то для решения задач антропологической стандартизации исходили из закономерностей распределения одного признака. В случае же двух (и более) размеров предстоит исходить из свойств распределения сочетания признаков. Как показано в нашей первой статье этого сборника, распределение сочетаний антропологических признаков обычно выражается нормальной корреляцией. Поэтому результаты всех построений в области стандартизации зависят от тесноты связи между основными размерами. Это не всегда учитывается в практике стандартизации, что и является одним из источников ошибок. Неправильный подход к корреляционной зависимости обычно выражается в какой-нибудь из двух противоположных форм: либо принимается предпосылка независимости изменений обоих главных признаков; тогда корреляция считается равной нулю. Либо же исходят из положения полной связи между признаками и не предусматривают самостоятельной изменчивости одного из них; тогда корреляция берется равной 1. Оба допущения ведут к просчетам. Представление о величине погрешности можно получить, сопоставляя друг с другом корреляционные таблицы с разными коэффициентами.

Для примера остановимся на корреляции между ростом и обхватом груди, взяв в качестве классовых интервалов роста 6 *см*, обхвата груди 4 *см*. Средний рост примем равным 167 *см*, средний обхват груди—88 *см*, а коэффициент корреляции возьмем равным 0,45. В таком случае численности сочетаний двух размеров будут представлены в следующей корреляционной таблице:

Таблица 16

Численности сочетаний двух размеров при $r = 0{,}45$

Рост (в *см*) / Обхват груди (в *см*)	До 155	161	167	173	179 и больше	Итого
До 80	16	28	18	4	—	66
84	28	84	93	33	4	242
88	18	93	162	93	18	384
92	4	33	93	84	28	242
96 и больше	—	4	18	28	16	66
Итого . .	66	242	384	242	66	1000

[1] Поскольку мы рассматриваем вопросы построения стандартов по сочетаниям размеров, то выделение одного из двух основных размеров в качестве первого, а другого в качестве второго—произвольно. Не имеет значения, какой из двух признаков принят для определения номеров и какой для подномеров. Однако условное деление на номера и подномера представляет большое удобство для градации изделий и потому сохраняется в нашем изложении.

Эта таблица отображает действительное распределение сочетаний двух признаков в мужском населении СССР.

Сопоставим с нею другую таблицу, построенную в предположении отсутствия связи между признаками. В этом случае распределение одного признака не зависит от другого, например, пропорции больших, средних и малых ростов берутся одинаковыми для всех величин обхвата груди. Таблица для $r = 0$ представлена ниже.

Таблица 17

Численности сочетаний двух размеров при $r = 0$

Рост (в *см*) / Обхват груди (в *см*)	До 155	161	167	173	179 и больше	Итого
До 80	4	16	26	16	4	66
84	16	59	92	59	16	242
88	26	92	148	92	26	384
92	16	59	92	59	16	242
96 и больше	4	16	26	16	4	66
Итого . . .	66	242	384	242	66	1000

Просчет определить нетрудно: берем полусумму абсолютных разностей между численностями соответственных клеток табл. 16 и 17 и делим ее на 1000; получаем 14%. Погрешность достаточно велика и указывает на необходимость принимать во внимание статистическую связь между размерами.

К значительно большему просчету приводит допущение об отсутствии самостоятельной изменчивости одного из признаков. Это допущение лежит в основе так называемого метода „канонов", исходящего из предположения о постоянстве соотношений между отдельными размерами человеческого тела[1]. Таблица корреляции при этой предпосылке имеет следующий вид.

Таблица 18

Численности сочетаний двух размеров при $r = 1$

Рост (в *см*) / Обхват груди (в *см*)	До 155	161	167	173	179 и больше	Итого
До 80	66	—	—	—	—	66
84	—	242	—	—	—	242
88	—	—	384	—	—	384
92	—	—	—	242	—	242
96 и больше	—	—	—	—	66	66
Итого . . .	66	242	384	242	66	1000

[1] О канонах см. в этом сборнике статью П. И. Зенкевича, стр. 7 и П. Н. Башкирова, стр. 80.

Как видно, все значения частот расположены по одной диагонали, что ни в какой степени не вяжется со всеми имеющимися наблюдениями об антропологических признаках. Не представляет труда определить просчет, получающийся при применении метода „канонов". Для этого достаточно вычислить разницы между численностями в табл. 16 и 18 или разности между клетками, расположенными по диагонали. Сумма этих разностей даст излишнее, не находящее сбыта количество изделий, построенных по методу „канонов", а также количество неудовлетворенного населения. Искомая сумма равна $(66-16)+(242-84)+\ldots=638$ на тысячу[1]. Следовательно, 64% населения не будут иметь подходящих по размерам изделий. Полученные результаты решительно побуждают отвергнуть применение „канонов" при массовом производстве предметов личного пользования.

Оба примера показывают необходимость учета корреляционной связи между признаками. Это требование, не снимая задач, рассмотренных выше применительно к одноразмерной системе стандартов, обобщает их и потому приводит к новым вопросам; их можно свести к следующим пунктам:

а) выражение связи между удовлетворенностью населения размерами изделий и числом вариантов;

б) оценка эффективности введения подномеров и связанный с ней критерий выбора тех или иных размеров в качестве основных;

в) приемы увязки размеров между собою;

г) определение численностей наилучших сочетаний (наилучший потребный ассортимент).

§ 2. Зависимость удовлетворенности населения размерами изделий от числа вариантов при двух основных размерах

Зависимость нарастания удовлетворенности от увеличения числа вариантов при двух основных размерах дается формулой

$$P_N = 1 - e^{\frac{-N\,\Delta_1\,\Delta_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}}, \qquad (6)$$

где N—число вариантов в ассортименте, Δ_1 и Δ_2—нормированные интервалы безразличия двух основных размеров, r — коэффициент корреляции между ними[2].

Для того чтобы составить наглядное представление об изучаемой зависимости, примем, что интервалы безразличия равны 1 (т. е. средним квадратическим отклонениям). Тогда возрастание удовлетворенности населения размерами изделий (P) в зависимости от возрастания числа „наилучших" вариантов (N) для разных коэффициентов корреляции будет представлено на рис. 6.

---

[1] В качестве вычитаемых приведены действительные численности сочетаний.

[2] Формула выводится из выражений (15) и (16), (I). Число вариантов, образующих площадь S_χ эллипса равных вероятностей E_{χ^2}, равно $N = S/\Delta_1\Delta_2$, где Δ_1 и Δ_2 —нормированные интервалы безразличия двух размеров и

$$S_\chi = \pi\chi^2\sqrt{1-r^2}.$$

Отсюда

$$N\,\Delta_1\Delta_2 = \pi\chi^2\sqrt{1-r^2},\quad \chi^2 = \frac{N\,\Delta_1\,\Delta_2}{\pi\sqrt{1-r^2}}.$$

Хотя рисунок построен для интервалов безразличия, равных 1, но он подойдет и для других значений. При этом достаточно поделить N на $\Delta_1\Delta_2$. Так, если интервал между номерами равен $\frac{1}{2}\sigma$, и между подномерами (в каждом номере) — $\frac{1}{3}\sigma$, то вместо приведенных на рисунке значений N следует брать числа в 6 раз больше. Если же интервалы обеих переменных равны 2σ, то все N следует уменьшить в 4 раза.

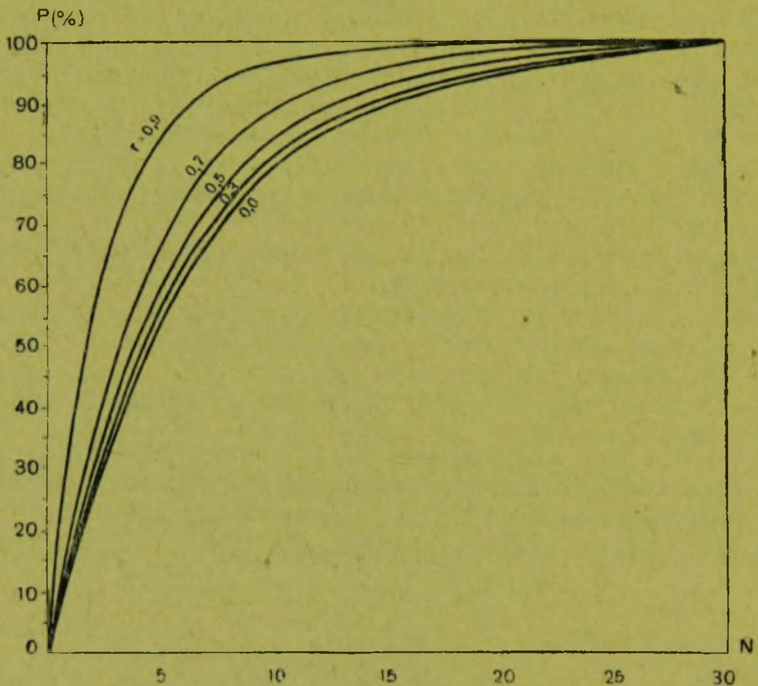


Рис. 6. Число вариантов (N) и удовлетворенность (P в %) при двух размерах и разных корреляциях между ними

Рисунок показывает, что при всех коэффициентах корреляции кривые удовлетворенности населения имеют такой же характер, как при одном размере. Сначала с увеличением числа размерных вариантов происходит относительно быстрое возрастание удовлетворенности, а затем, по достижении определенной величины, рост удовлетворенности становится столь мало ощутимым, что введение новых вариантов делается нецелесообразным. Увеличение удовлетворенности при двухразмерной системе естественно идет медленнее, чем при одноразмерной. Конечно, это не должно обозначать целесообразности перехода от двух размеров к одному, а лишь выражает тот простой факт, что двухразмерная система отвечает более высоким требованиям относительно удовлетворенности в целом.

Диаграмма показывает также, что удовлетворенность населения размерами вариантов при больших корреляциях между ведущими признаками возрастает быстрее, чем при малых; это вполне понятно, потому что малый коэффициент корреляции свидетельствует о том, что второй ведущий признак обладает большой самостоятельной изменчивостью, в то время как при высокой корреляции двухразмерная система по существу приближается к одноразмерной.

При этом существенно отметить, что при малых коэффициентах корреляции кривые отличаются друг от друга сравнительно мало. Так, разница значений удовлетворенности при $r=0$ и при $r=0{,}3$ на всем протяжении кривых не превышает 2%. Большей величины достигает разница кривых при $r=0{,}3$ и $r=0{,}5$, однако она нигде не превышает 4%. Но когда коэффициент корреляции принимает высокие значения, разница между кривыми заметно возрастает. Так, кривая $r=0{,}7$ отличается от кривой $r=0{,}5$ больше, чем эта последняя отличается от нулевой. Все это говорит о том, что при слабых статистических связях смещение коэффициента корреляции не влечет существенных просчетов, но при сильных связях точность его оценки имеет более существенное значение.

Вычисления по формуле (6) представляют известные трудности. Для того чтобы их преодолеть, нами построена номограмма 1, которая здесь прилагается (рис. 7).

Номограмма выражает зависимость между тремя переменными: удовлетворенностью (в %) P, числом вариантов N и коэффициентом корреляции между размерами r. Она позволяет находить значения любой из этих переменных по двум другим. Искомое значение отыскивается на номограмме обычным способом; на соответствующих шкалах[1] находятся заданные значения двух величин. Они соединяются нитью или линейкой, и пересечение нити или линейки с третьей шкалой указывает ответ.

Приведем примеры задач, решаемых при помощи номограммы.

1) Даны удовлетворенность (P), корреляция между признаками r, нормированные промежутки между номерами и подномерами Δ_1 и Δ. Требуется найти наилучшее (оптимальное) число вариантов.

Для примера допустим, что основными размерами являются обхват груди (x_1) и рост (x_2), при градациях по 4 *см* для обхвата груди и по 6 *см* для роста, причем эти величины совпадают с средними квадратическими отклонениями, так что $\Delta_1\Delta_2=1$. Спрашивается, какое наименьшее число вариантов необходимо для достижения удовлетворенности 98,5%? На шкале P берем пометку 98,5%, на шкале r — пометку 0,45. Соединяем их нитью и находим на шкале S пометку 23; следовательно, при $\Delta_1\Delta_2=1$ наименьшее необходимое число номеров равно 23. Если, однако, $\Delta_1\Delta_2$ не равно 1, а, допустим, $^1/_4$, то число номеров возрастает в 4 раза и становится равным 92[2]. Это показывает, в какой степени на увеличение удовлетворенности населения влияет расширение интервала безразличия. Если, например, изделия производятся из резины (вроде хирургических перчаток), то при увеличении эластичности вдвое, $\Delta_1\Delta_2$ увеличивается в 4 раза, и для достижения заданной удовлетворенности потребуется в 4 раза меньше вариантов. В общем виде уменьшение числа номеров пропорционально квадрату увеличения растяжимости материала. Из этого правила мыслимы исключения, так как интервалы безразличия необязательно должны быть одинаковы у обоих ведущих размеров. Но для первого приближения можно считать, что если, сохраняя данную степень удовлетворенности, желательно понизить число размерных вариантов в k раз, то эластичность материала достаточно повысить примерно в $\sqrt{k}$ раз.

---

[1] На шкале S нанесены деления $N\Delta_1\Delta_2$, где Δ, как и ранее, обозначают нормированные интервалы безразличия.

[2] Расчет заключается в следующем: по номограмме найдены $N\Delta_1\Delta_2=23$ или $^1/_4\,N=23$. Отсюда $N=92$.

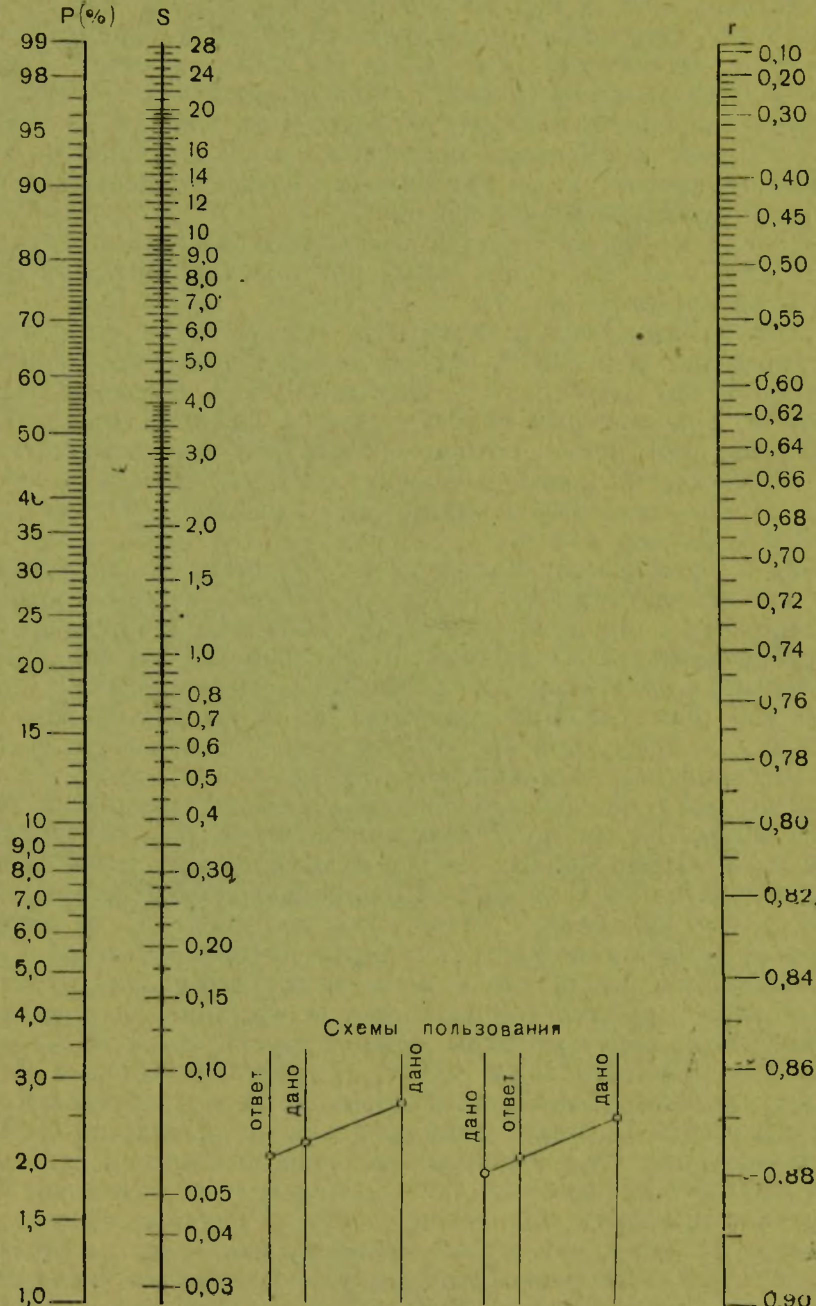


Рис. 7. Номограмма 1. Нахождение удовлетворенности и числа вариантов

2) Заданы: число размерных вариантов N, корреляция между размерами r, приращения размеров $\Delta_1\Delta_2$. Требуется найти наибольшую удовлетворенность, достигаемую при этих данных.

Линейка или нить накладываются между соответствующими пометками шкал N и r, и на протяжении линии, соединяющей эти пометки, при пересечении ее со шкалой P читаем ответ.

Пусть, например, основными размерами опять служат обхват груди (x_1) и рост (x_2), причем $r = 0{,}45$, $\Delta_1\Delta_2 = 1$. Дана система стандартов из 9 вариантов: 3 номера по обхвату груди и 3 подномера по росту. Спрашивается, какая может быть достигнута степень удовлетворенности? Соединяя пометку 0,45 на шкале r с пометкой 9 на шкале S и продолжая нить до пересечения со шкалой P, найдем ответ — 80%. Полученный результат показывает неудовлетворительность системы стандартов, состоящей из 9 типов. Если $\Delta_1\Delta_2$ не равно 1, то, чтобы пользоваться номограммой, заданное число вариантов нужно помножить на $\Delta_1\Delta_2$.

При подобных расчетах необходимо иметь в виду, что по номограмме, как и по формуле (6), получается число наилучших вариантов, т. е. определенных таким образом, что их размеры, набор и численность дают наивысшую степень удовлетворенности. Также и удовлетворенность населения, полученная теми же способами, достижима не при всякой системе стандартов с данным числом номеров. Поэтому найденную при помощи номограммы степень удовлетворенности следует рассматривать, как некоторый предел, который практически может быть и не вполне достигнут. Лучшая система стандартов вообще не всегда достижима как по технологическим условиям, так и вследствие допущений, принятых ради удобства расчетов. Но она является пределом, к которому рационально построенная система антропологических стандартов стремится подойти возможно ближе. Закономерность возрастания удовлетворенности от увеличения числа наилучших вариантов служит основой подобных построений.

§ 3. Вопрос об увеличении числа главных (основных) размеров. Условия целесообразности массового производства

Одной из основных задач при построении системы стандартов является определение главных или ведущих размеров. Ее решение должно удовлетворять условию достижения наибольшей удовлетворенности не только по основным, но и по всем подчиненным или дополнительным размерам.

Заметим, что максимум удовлетворенности населения вариантами изделий при практически полном учете изменчивости одного размера и лишь частичном учете изменчивости другого, определяется этим другим размером. Пусть, например, по обхвату груди достигнута почти полная удовлетворенность, для чего потребовалось 5 номеров с интервалами 4 *см*; рост же в каждом номере представлен лишь одним „лучшим“ вариантом. Но „лучшими“ вариантами, вообще говоря, являются те, которые приводят к наибольшей удовлетворенности по второму, а следовательно, и по обоим признакам. В нашем случае вторым признаком служит рост. Его лучшими вариантами при нормальном распределении будут средние размеры роста, соответствующие 5 заданным обхватам груди. Степень же удовлетворенности определится интервалом безразличия роста. Так, например, допустим, что у мужчин с обхватом груди 84 *см* средний рост равен

164,5 *см*; это и будет лучший вариант роста при обхвате груди 84 *см*. Если интервалы роста составляют 6 *см*, то удовлетворены будут лишь люди, имеющие рост $164{,}5 \pm 3$ *см*. Но и в каждом другом номере удовлетворены также будут лишь люди с средним для данного номера ростом ± 3 *см*.

Чтобы найти степень удовлетворенности, соответствующую данному размаху изменчивости, его нужно нормировать, т. е. поделить на среднее квадратическое отклонение. Но сигма второго признака, при заданном (постоянном) значении первого или частная сигма равна $\Sigma = \sigma\sqrt{1-r^2}$, и нормированный размах допускаемой изменчивости будет равен $\frac{\Delta_2}{\sqrt{1-r^2}}$, где Δ_2 — нормированный интервал безразличия второго признака. В нашем случае $\Delta_2 = 1$, так как интервалы роста равны 6 *см* и равны сигме; $r = 0{,}45$ и $\frac{\Delta_2}{\sqrt{1-r^2}} = 1{,}12$. Входя в табл. 19(I) с $t = \frac{\Delta_2}{2\sqrt{1-r^2}} = 0{,}56$, получим значение удовлетворенности, равное 0,425[1]. Следовательно, сочетаниями двух размеров (обхвата груди и роста) будет удовлетворено лишь 42,5% населения.

Определим теперь максимум возможной удовлетворенности, если вместо 5 номеров обхвата груди введем 5 сочетаний номеров и подномеров, например, возьмем 3 номера: ниже среднего, средний, выше среднего и разделим средний на 3 подномера или же составим какие-нибудь другие сочетания, не предрешая, какие именно. В таком случае удовлетворенность размерами вариантов, построенных с учетом изменчивости обоих основных размеров, находится по номограмме 1. Так, для сочетаний роста и обхвата груди при $r = 0{,}45$, $\Delta_1\Delta_2 = 1$ и $N = 5$, найдем, что удовлетворенность равна 58%. Следовательно, введение второго основного размера или подномера дает прирост удовлетворенности с 42,5 до 58% или в 1,36 раза, что имеет несомненное практическое значение.

Итак, одного ведущего размера недостаточно. Но достаточно ли введение двух размеров? Ведь если достигнуто удовлетворение по двум главным размерам, значит ли это, что население будет одновременно удовлетворено по третьему, четвертому и пятому размерам? Например, костюм может подходить для длины тела и обхвата груди, но оказаться неподходящим для высоты плеч, окружности талии, длины рук и т. д. Тогда потребуется введение третьего, четвертого, пятого основных размеров. Однако такого рода соображения могут навести на мысль о безнадежности попыток добиться высокой общей удовлетворенности населения при массовом производстве изделий или о необходимости слишком большого числа вариантов. В самом деле, чтобы достичь достаточной удовлетворенности сочетаниями двух признаков при корреляции 0,5, потребуется около 25 вариантов. Для достижения удовлетворенности сочетаниями трех размеров потребуется 125 вариантов, а учет изменчивости пятого признака доводит число вариантов более чем до 1000. Несомненно, что при столь большом разнообразии изделий выгоды массового производства очень сильно понизятся.

---

[1] Тот же результат мы получим, если воспользуемся табл. 2, в которую удовлетворенность входит в качестве функции, или рисунком 3, или же, наконец, номограммой 1, (I).

Между тем в действительности дело вовсе не так безнадежно, и огромное число размерных вариантов отнюдь не является необходимым. Следует отметить два обстоятельства, которые могут повести к значительному снижению числа необходимых вариантов:

1) взаимная связанность размеров между собой,

2) наличие признаков, допускающих при переходе от одного размерного варианта к другому относительно большие интервалы (допуски).

1) Многие размеры тела связаны между собою. При этом особенно значительны коэффициенты корреляции между размерами одного направления, продольного или поперечного. Следующие таблицы дают об этом некоторое представление.

Таблица 19

Корреляции различных размеров с длиною тела[1]

Размеры	Коэффициенты корреляции
Длина ноги	0,89
„ руки	0,83
„ туловища	0,60
Ширина плеч	0,58
Рост сидя	0,75
Высота подвздошной точки .	0,84
„ лобковой точки . . .	0,85
Длина стопы	0,79

Как показывает таблица, статистическая связь между продольными размерами достигает весьма большой величины. Корреляция между окружностью груди и размерами других окружностей лишь немного меньше; об этом можно судить по табл. 20.

Таблица 20

Корреляции различных размеров с окружностью груди[2]

Размеры (окружности)	Коэффициенты корреляции
Шеи	0,60
Талии	0,67
Голени	0,51
Плеча в спокойном состоянии	0,56
Плеча в напряженном состоянии	0,60

[1] Первые 5 коэффициентов корреляции приведены у В. В. Бунака, „Антропометрические материалы для установления размеров одежды“ (по крестьянам Арзамасского района), М.—Л., 1932, стр. 42—43. Последние три приведены у П. Н. Башкирова, „Выбор основных размеров для построения системы номеров изделий“, „Вопросы стандартизации“, М. 1946, стр. 23 и 28.

[2] По В. В. Бунаку, там же, стр. 69.

О корреляциях между длиннотными размерами стопы дает представление табл. 21.

Таблица 21

Корреляции длины стопы с другими размерами[1]

Размеры (длины)	Коэффициенты корреляции
От дистальной точки пятки до внутреннего пучка	0,89
„ „ „ сгиба голеностопного сустава .	0,74
„ „ „ центра внутреннего мыщелка . .	0,59
„ „ „ конца 5-го пальца	0,84
„ „ „ наружного пучка	0,79

Как видно из таблицы, корреляции достигают весьма большой высоты.

Связанность антропологических признаков автоматически ведет к уменьшению необходимого числа основных размеров, так как целая группа признаков может быть представлена одним ведущим. Вместе с тем, однако, можно показать, что если все признаки без исключения между собою связаны, то увеличение числа основных размеров влечет возрастание удовлетворенности по подчиненным лишь до известного предела.

Чтобы нагляднее представить происходящий при этом процесс, допустим, что все корреляции между признаками одинаковы, а интервалы безразличия размеров равны их средним квадратическим отклонениям. Если в таком случае число главных размеров равно n, то наибольшая удовлетворенность по всем N размерам выражается формулой:

$$P_{\text{п},N} = F(t),$$

причем

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+nr}{1+(n-1)\,r-nr^2}},$$

где $F(t)$ дается в таблице 19,(I), r — коэффициент корреляции между размерами[2].

Примем для примера, что все коэффициенты корреляции между размерами равны 0,75. Произведя подсчеты, получим следующие соотношения:

Число основных размеров (n) 1 2 3 4 5...$N-1$[3].

Удовлетворенность по N размерам в % 55 59 62 63 64... 68.

Приведенный ряд показывает, что заметный рост удовлетворенности происходит лишь до увеличения числа основных признаков до трех, оно повышает удовлетворенность на 7%. Все же остальные

---

[1] По данным Института антропологии.

[2] Подкоренное выражение обратно выражению

$$K_{N.123\ldots n} = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n+1}}}, \text{ где } D_n = \begin{vmatrix} 1 & r & \ldots & r \\ r & 1 & \ldots & r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r & r & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1-r)^{n-1}\left[1+(n-1)\,r\right].$$

[3] Если N велико.

размеры, сколько бы их ни брать, повысят общую удовлетворенность не более чем на 6%. Отсюда видно, что при корреляции между основными размерами увеличение их числа свыше трех не оправдывает себя, так как приводит к значительному росту числа номеров и к связанным с этим трудностям производства и сбыта изделий, не давая заметного приращения удовлетворенности населения их размерами.

2) Второе и особенно существенное обстоятельство, которое делает ненужным большое число главных размеров, это наличие размеров, допускающих относительно большие интервалы. В приведенном выше примере мы принимали, что нормированный интервал безразличия для всех размеров равен 1, т. е. что его абсолютная величина равна среднему квадратическому отклонению. Это было чисто условное допущение, принимавшееся ради простоты расчетов. Но оно слишком строго. Почти несомненно, что среди множества размеров имеются такие, у которых интервалы безразличия либо весьма велики, либо ограничены с одной стороны. Это особенно относится к изделиям из эластичных материалов. Например, при конструировании деталей резиновых перчаток важное значение имеет точность пригонки размеров, обеспечивающих функционирование кисти руки (вроде длины пальцев, полноты кисти и т. п.); для других же размеров, например, протяжения перчатки на предплечьи, допустима меньшая прилаженность, т. е. больший интервал безразличия.

Это обстоятельство влечет увеличение скорости достижения общей удовлетворенности и уменьшение необходимого числа главных размеров.

Подводя итоги, можно сделать заключение: слишком большое увеличение числа основных размеров, например, свыше трех, вряд ли целесообразно. При этом массовое производство изделий в состоянии полностью удовлетворить спрос, лишь когда интервалы безразличия подчиненных размеров относительно велики или ограничены с одной стороны. Если же такую систему стандартов построить нельзя, то массовая продукция не сможет разрешить задачи полного удовлетворения населения. Но даже и в этих условиях фабричное производство достаточно себя оправдает, так как рациональные приемы антропологической стандартизации обеспечивают удовлетворенность стандартными изделиями хотя бы и не полного, но все же весьма значительного по абсолютной численности контингента потребителей.

§ 4. Выбор главных размеров

Под рационально построенной системой стандартов, как и ранее, будем понимать такую, которая при заданном числе вариантов приводит к наибольшей удовлетворенности населения размерами изделий или же при данной степени удовлетворенности состоит из наименьшего числа вариантов. Основные или главные размеры такой системы, так же как и значения подчиненных размеров каждого ее варианта, являются лучшими. Их определение представляет собою задачу, решаемую также на основе зависимости удовлетворенности от числа размерных вариантов. Но теперь предстоит найти эту закономерность в общем виде для любого целого числа n размеров.

Пусть число основных размеров равно n, число вариантов N, требуется найти удовлетворенность населения N вариантами, обозначаемую через $P_{n,N}$ (в %). Для этого поступаем так:

а) Сначала отыскиваем вспомогательную величину χ_n[1] по формуле

$$\chi_n = C\sqrt[n]{N}, \tag{7}$$

причем
$$C = \sqrt[n]{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_n}{\pi^{n/2}\kappa_n}},$$

где $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$ и κ_n определены в приложении 3, (I), стр. 65 и 66, а $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\Delta_n$ — нормированные (поделенные на σ) интервалы безразличия.

б) Определив C, подставляем его и число основных размеров n в формулу (7) и находим значение вспомогательной функции χ_n.

в) Наконец, по полученному значению χ_n при помощи специально составленной табл. 22 отыскиваем удовлетворенность $P_{n,N}$, применяя, где необходимо, обычную интерполяцию.

Для примера найдем зависимость удовлетворенности от числа вариантов при четырех размерах. Допустим, что это — длина тела (1), обхват груди (2), длина руки (3), длина ноги (4). Корреляции между ними равны

$$r_{12} = 0{,}50, \qquad r_{23} = 0{,}40,$$
$$r_{13} = 0{,}75, \qquad r_{24} = 0{,}45,$$
$$r_{14} = 0{,}85, \qquad r_{34} = 0{,}80,$$

интервалы безразличия —

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1.$$

а) Прежде всего для определения C в формуле (7) требуется найти величины $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \Gamma(3)$, а также детерминант κ_4^2. Но величина $\Gamma(3) = 2 \cdot 1 = 2$, что следует из ее определения в приложении 3(I), а κ_4^2 вычислено там же (стр. 65).

Оно равно 0,26647. Следовательно,

$$C = \sqrt[4]{\frac{2}{0{,}26647\,\pi^2}} = 0{,}9338.$$

б) Отсюда $\chi_4 = 0{,}9338\sqrt[4]{N}$.

в) Подставив теперь вместо N ряд чисел: 1, 10, 25, 50, 80 и 100; получаем для χ_4 значения 0,934; 1,660 и т. д.

г) Остается отыскать $P_{4,N}$. Так, например, для $N = 10$, $\chi_4 = 1{,}660$. Обращаясь к табл. 22 при $n = 4$, увидим, что χ_4, равное 1,660, находится между числами 1,481 и 1,832, соответствующими P_N, равным

---

[1] См. приложение 3 е (I).

Таблица 22[1]

Значения χ_n для данного числа основных размеров n и удовлетворенности $P_{n,N}$ (в %).

n \ P_N	1	2	5	10	20	30	50	70	80	90	95	98	99
1	0,000	0,032	0,063	0,126	0,253	0,385	0,675	1,036	1,281	1,645	1,960	2,326	2,576
2	0,141	0,200	0,321	0,459	0,668	0,844	1,177	1,552	1,794	2,146	2,448	2,797	3,034
3	0,339	0,430	0,593	0,764	1,002	1,193	1,538	1,914	2,155	2,500	2,795	3,136	3,368
4	0,545	0,655	0,843	1,031	1,284	1,481	1,832	2,209	2,447	2,789	3,080	3,416	3,644
5	0,744	0,867	1,070	1,269	1,531	1,732	2,086	2,463	2,700	3,039	3,327	3,659	3,884
6	0,934	1,065	1,279	1,485	1,752	1,957	2,313	2,689	2,925	3,263	3,549	3,877	4,100
7	1,113	1,251	1,472	1,683	1,955	2,161	2,519	2,895	3,131	3,467	3,751	4,077	4,298
8	1,283	1,425	1,653	1,868	2,143	2,351	2,710	3,086	3,321	3,656	3,938	4,262	4,482
9	1,445	1,591	1,823	2,042	2,319	2,528	2,888	3,264	3,499	3,832	4,113	4,436	4,655
10	1,599	1,749	1,985	2,206	2,486	2,696	3,056	3,433	3,666	3,998	4,279	4,600	4,817

[1] Вычислено по таблице χ^2, причем $P_N = 1 - P_n\ (X)$, где n — число степеней свободы. Наиболее подробные таблицы χ^2 даны Е. Е. Слуцким: „Таблица для вычисления неполной Г-функции и функции вероятностей χ^2". М.—Л., 1950.

30% и 50%. Произведя интерполяцию, получим $P_{4,10} = 40{,}2$. Выполним подобные же действия для других N. В результате получим табл. 23.

Таблица 23

Зависимость удовлетворенности от числа вариантов

Число вариантов (N)	1	10	25	50	80	100
χ_4	0,934	1,660	2,088	2,483	2,793	2,953
Удовлетворенность (в %) P	7,42	40,2	63,6	81,0	90,1	92,8

На основании этих расчетов составлен график зависимости удовлетворенности P от числа вариантов N (рис. 8).

Из рисунка и приведенных числовых примеров мы видим, что достижение высокой удовлетворенности по четырем главным размерам, естественно, требует большого числа вариантов. Так, для достижения удовлетворенности 90% нужно, чтобы число вариантов N было равно 80 и, следовательно, чтобы каждый размер при этом был представлен примерно тремя вариантами. Однако и при значительно меньшем числе вариантов достижима относительно высокая удовлетворенность, оправдывающая целесообразность массового производства. Так, уже при 30 вариантах удовлетворенность достигает примерно 70%, и если общее количество потребителей измеряется сотнями тысяч, то контингент удовлетворенных потребителей по абсолютному значению будет составлять весьма большое число.

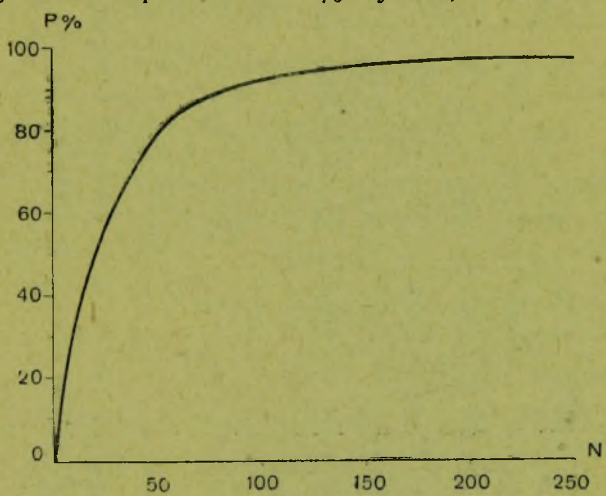


Рис. 8. Число вариантов (N) и удовлетворенность (P в %) при четырех размерах

Рассмотренный пример еще раз показывает, какое значение имеет величина интервалов безразличия. Мы принимали, что они для всех размеров равны средним квадратическим отклонениям. Но допустим, что хотя бы по двум размерам интервалы безразличия равны 2σ. Тогда для достижения заданной удовлетворенности потребуется в 4 раза меньше вариантов, чем ранее; удовлетворенности 90% будет соответствовать не 80 вариантов, а всего лишь 20; 30 вариантов дадут удовлетворенность не 70%, а 95%; для достижения же 70% удовлетворенности потребуется всего 5 вариантов. Эти расчеты наглядно подтверждают высказанное выше положение, что условием, обеспечивающим широкое распространение изделий массового производства для индивидуального пользования, является наличие больших или ограниченных с одной стороны интервалов безразличия значительной части размеров, определяющих детали изделий.

Изложенный прием позволяет определять как необходимое число вариантов при заданной степени удовлетворенности, так и максимальную степень удовлетворенности при заданном числе вариантов, для любого числа основных размеров.

Закономерность, выражающая зависимость удовлетворенности от числа вариантов в общем виде, дает также возможность выяснить вопрос о выборе основных размеров. Очевидно, что они должны быть выбраны так, чтобы приводили к наибольшей общей удовлетворенности (по всем размерам). Для этого требуется, чтобы основные размеры, обладая наименьшими интервалами безразличия, в то же время наилучшим образом вели за собою все прочие. Подобная задача поддается математической формулировке с помощью так называемых векторных корреляций; но при большом числе размеров ее строгое решение фактически неосуществимо, ибо требует огромного числа вычислений, а также знания всех интервалов безразличия. Поэтому на практике исходят из допущения, упрощающего задачу и позволяющего воспользоваться найденной закономерностью, а именно принимается, что кривая удовлетворенности при доведении числа основных размеров до трех и при надлежащем их выборе уже весьма близка к кривой удовлетворенности по всем размерам. Другими словами, предполагается, что разница между числами вариантов, требуемыми для достижения заданной удовлетворенности, в лучшей трехразмерной и в предельно размерной системах весьма мала. Расчеты показывают, что для достижения такого наилучшего выбора трех основных размеров необходимо, чтобы корреляции между основными размерами, так же, как и их интервалы безразличия, были возможно меньше[1]. Решение является не совсем строгим, но оно практически удобно и не дает существенной погрешности. Если же приведенному критерию удовлетворяют несколько наборов главных размеров, тогда предпочтение следует отдать тому, в котором основные размеры более тесно связаны с подчиненными.

Тремя размерами, которые наименее связаны между собою, но каждый из которых находится в тесной связи с большим числом других размеров, являются наиболее значительные размеры, направленные по трем координатным осям, т. е. наибольшие из длиннотных (продольных), широтных (поперечных) и высотных размеров. Они же обычно имеют сравнительно небольшие нормированные интервалы безразличия. Введение какого-нибудь четвертого размера в качестве основного даст лишь относительно малое приращение удовлетворенности, сравнительно с тем, которое достигается тремя „наилучшим образом“ выбранными основными размерами. Поэтому оно обычно излишне, поскольку значительно осложняет производственный процесс.

Все эти положения в основном приняты в работах Института антропологии[2]. Следует, однако, оговорить, что при существующей практике промышленного производства система стандартов ограничивается чаще всего двумя главными размерами. Тогда наилучшими

---

[1] Это вытекает из условия, согласно которому

$$N_n - N_3 = \frac{\pi^{n/2} \chi_n^{n} (P)\, \kappa_n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n} - \frac{2\pi^{3/2} \chi_3^{3} (P)\, \kappa_3}{3\, \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} = \min,$$

причем N определяются по формулам (7), как функции от n. Из этого условия вытекает: $\kappa_3 : \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = max$, но κ становится большим при малых корреляциях между переменными. Отсюда следует приводимое в тексте положение.

[2] Подробнее см. статью П. Н. Башкирова.

должны быть: один, отображающий обхват подлежащей облеганию части тела, другой — высоту или вообще направленные перпендикулярно этой окружности размеры. Таковы, например, в швейном деле обхват груди и рост или длина туловища. Подобный выбор основных размеров может дать положительный результат, хотя в большинстве случаев введение третьего основного размера должно содействовать заметному повышению удовлетворенности населения размерами стандартных изделий.

§ 5. Значения основных и подчиненных размеров

Лучшие значения основных (главных) и подчиненных размеров определяются условием достижения наибольшей удовлетворенности населения. Положения, касающиеся одного главного признака, изложены выше (стр. 100). Если же основных размеров два, то вопрос решается по-разному, в зависимости от числа предлагаемых размерных вариантов. Когда число вариантов настолько велико, что обеспечивает высокую степень удовлетворенности населения, то система стандартов с достаточной полнотой отображает распределение обоих признаков в коллективе потребителей. В таком случае значения основных размеров могут быть получены делением размаха изменчивости каждого из них на число вариантов, взятых с промежутками, равными интервалам безразличия. Таблица численностей стандартов или вариантов приобретает форму обычной корреляционной таблицы, в которой все горизонтальные строи разбиты на одни и те же классы, так же как и все вертикальные; значения подномеров во всех номерах одинаковы, и если число тех и других значительно, то система стандартов при надлежащих численностях вариантов обеспечивает почти полную удовлетворенность запросов населения на различные размеры. Для примера можно обратиться к табл. 16 — таблице распределения сочетаний обхвата груди и длины тела. Относительная численность представленных в ней 25 вариантов обеспечивает примерно 99,5% удовлетворенности населения, для которого средние значения роста и обхвата груди соответственно равны 167 и 88 *см*, а корреляция между ними 0,45. Поэтому вполне приемлемой системой размерных стандартов будет такая, в которой варианты обхвата груди и длины тела (номеров и подномеров) представлены в табл. 24 (предполагается, что каждый номер подразделяется на 5 подномеров, приведенных в последней строке).

Таблица 24

Значения номеров и подномеров[1]

	1	2	3	4	5
Номера (обхват груди в *см*)	80	84	88	92	96
Подномера (рост в *см*)	155	161	167	173	179

Два крайних варианта 80/155 и 96/179 встречаются столь редко, что число стандартных размеров может быть доведено до 23.

[1] Номер обозначается здесь величиною признака, т. е. „антропологическим" размером груди. Приближенный переход от этого размера к номеру изделия дается формулой: N швейный $= \frac{1}{2}$ (N антропологический $+ 8$).

Та же система может быть принята и для населения с другими средними значениями размеров, но при больших сдвигах этих параметров потребуется внесение новых вариантов, например, роста 152 *см* или обхвата груди 79 *см* и т. п.

Выбор сочетаний признаков с их равномерной в обоих направлениях градацией является, конечно, не единственным, при котором достижима высокая удовлетворенность населения, но он дает наиболее простую и удобозримую систему, и если не встречается возражений с технологической стороны, то нет оснований предпочитать его какому-нибудь другому.

Иначе обстоит дело, когда по условиям производства число размерных вариантов ограничено; в таком случае способ независимого сочетания размеров может повести к понижению удовлетворенности. Во избежание этого необходимо, чтобы размеры подномеров в каждом номере были разные, причем градация размеров не в обоих направлениях будет равномерной. Необходимо учитывать, что наибольшие численности в каждом строю падают на классы, в центре которых находятся строевые средние. Поэтому уместнее применить такой прием: один из главных размеров (безразлично какой) принять за первый, ведущий; его размах изменчивости поделить на части, равные величине интервала безразличия, предпочтительнее на нечетное число частей, чтобы можно было выделить один центральный вариант или центральный номер; общее число номеров должно примерно равняться корню квадратному из всего числа вариантов; так, если предложено всего 9 вариантов, то целесообразно принять три номера—центральный и два примыкающих к нему. Средние значения второго основного размера следует находить по формуле связи с первым; формула носит название уравнения регрессии (см. § 1 гл. 2, (I) и имеет вид

$$y = M_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - M_x).$$

Подставляя в это уравнение вместо x величины первого размера в различных номерах, получим значения центральных подномеров; если данный номер подразделяется на несколько подномеров, то кроме центрального надлежит брать соответствующее количество примыкающих к нему подномеров; оно должно быть примерно равно числу номеров. Так, при 9 вариантах наибольшая удовлетворенность достигается сочетаниями трех номеров с тремя подномерами.

Для примера обратимся к тем же сочетаниям обхвата груди с длиною тела и будем считать, что предложено выделить 9 вариантов. Если руководиться корреляционной таблицей (табл. 16), то для достижения наибольшей удовлетворенности придется выделить 9 центральных клеток, т. е. взять сочетания трех обхватов груди 84, 88 и 92 *см* с тремя размерами роста 161, 167, 173 *см*. Численность этих сочетаний равна 0,768, так что удовлетворенность населения стандартными изделиями составит 77%. Однако это не является максимальной степенью удовлетворенности, достижимой при данном числе вариантов. Пользуясь номограммой 1 (рис. 7), мы убедимся, что максимум удовлетворенности при 9 вариантах составляет 80%. Чтобы получить сочетания размеров, приближающие к этому максимуму удовлетворенности, величины подномеров следует находить по уравнению регрессии. Для примера сначала примем в качестве первого основного признака обхват груди; в таком случае наилучшими значениями номеров являются три центральные величины—84 *см*, 88 *см* и 92 *см*. Уравнение же регрессии имеет вид $y = 107{,}600 + 0{,}675\,x$. Пользуясь им, найдем, следующие значения центральных подномеров или размеров длины тела.

Номера (x) Обхват груди (в *см*)	Центральные подномера (y) Рост (в *см*)
84	164
88	167
92	170

Отделяя подномера друг от друга интервалом безразличия, равным 6 *см*, мы придем к такой системе 9 вариантов:

Таблица 25

Система 9 вариантов (стандартов) — *а*

Обхват груди в *см* (номера) / Рост в *см* (подномера)	84	88	92
1	158	161	164
2	164	167	170
3	170	173	176

Аналогичную таблицу получим также, если в качестве первого основного размера возьмем рост и по нему определим подномера для груди. Уравнение регрессии будет тогда иметь вид $x = 37{,}9 + 0{,}3\,y$ и таблица примет следующую форму:

Таблица 26

Система 9 вариантов (стандартов) — *б*

Рост в *см* (номера) / Обхват груди в *см* (подномера)	161	167	173
1	82	84	86
2	86	88	90
3	90	92	94

Обе системы приводят к одной и той же степени удовлетворенности, близкой к 80%, т. е. на 3% больше той, которая получается при равномерной градации. Какую из двух систем выбрать, этот вопрос выходит за пределы теории антропологической стандартизации и решается технологическими соображениями.

Но как бы ни были выбраны основные размеры, определение соответствующих значений подчиненных размеров, дающее наибольшую удовлетворенность по всем признакам, производится одинаково. Наилучшие значения подчиненных размеров находятся при помощи уравнений регрессии. Если система стандартов определяется одним основным размером, то уравнение регрессии для нахождения подчиненных (прочих) размеров имеет вид, который уже приводился выше, но который сейчас удобнее представить так:

$$x_1 = M_1 + r_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - M_2),$$

где индекс 1 относится к подчиненному, 2 — к основному размеру. Если система стандартов определяется двумя основными размерами, то наилучшие значения остальных, подчиненных размеров находятся по формуле множественной регрессии или корреляционного уравнения

$$x_1 = M_1 - \frac{R_{12}}{R_{11}}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - M_2) - \frac{R_{13}}{R_{11}}\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(x_3 - M_3),$$

где 3 — относится ко второму основному размеру. Для нахождения лучших значений четвертого подчиненного размера служит формула

$$x_1 = M_1 - \frac{R_{12}}{R_{11}}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - M_2) - \frac{R_{13}}{R_{11}}\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(x_3 - M_3) - \frac{R_{14}}{R_{11}}\frac{\sigma_1}{\sigma_4}(x_4 - M_4),$$

где 4 — относится к третьему основному размеру. Величины R_{ih}, как определено выше [стр. 64,(I)], представляют собою миноры, получившиеся зачеркиванием i-й строки и h-го столбца в симметричном определителе, составленном из коэффициентов корреляций, с единицами на главной диагонали[1]:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & 1 \end{vmatrix}$$

и умноженные на $(-1)^{i+h}$.

В частности, для случая трех переменных, т. е. при двух основных размерах, получается

$$x_1 = M_1 + \frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{1 - r_{23}^2}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - M_2) + \frac{r_{13} - r_{12} r_{23}}{1 - r_{23}^2}\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(x_3 - M_3). \quad (8)$$

Например, допустим, что основными размерами являются рост (x_2) и обхват груди (x_3) и требуется найти значение длины руки (x_1). При этом дано

$$\begin{array}{lll} M_1 = 75 \text{ см}, & M_2 = 167 \text{ см}, & M_3 = 88 \text{ см}, \\ \sigma_1 = 3 \text{ см}, & \sigma_2 = 6 \text{ см}, & \sigma_3 = 4 \text{ см}, \\ r_{12} = 0{,}75, & r_{13} = 0{,}40, & r_{23} = 0{,}45. \end{array}$$

Подставляя эти значения в формулу (8), получим

$$x_1 = 75 + \frac{0{,}75 - 0{,}40 \cdot 0{,}45}{1 - 0{,}45^2} \cdot \frac{3}{6}(x_2 - 167) +$$

$$+ \frac{0{,}40 - 0{,}75 \cdot 0{,}45}{1 - 0{,}45^2} \cdot \frac{3}{4}(x_3 - 88).$$

После приведения найдем

$$x_1 = 10{,}1398 + 0{,}3574\, x_2 + 0{,}0588\, x_3. \quad (9)$$

[1] Более подробно см. приложение 3, (I).

Подставляя сюда соответствующие значения x_2 — роста и x_3 — обхвата груди, получим „наилучшие" значения длины руки для вариантов, приведенных в табл. 27.

Таблица 27

Значения подчиненного размера (длины руки), соответствующие значениям двух основных размеров (роста и обхвата груди)

Обхват груди (в *см*) \ Рост (в *см*)	155	161	167	173	179
80	70,2	72,4	74,5	76,7	78,8
84	70,5	72,6	74,8	76,9	79,1
88	70,7	72,9	75,0	77,1	79,3
92	70,9	73,1	75,2	77,4	79,5
96	71,2	73,3	75,5	77,6	79,8

Так же могут быть найдены и все другие размеры, при которых удовлетворенность населения достигает наибольшей величины.

Определение подчиненных размеров по двум главным может быть выполнено при помощи несложной номограммы. Ее образцом служит номограмма 2, приводимая на рис. 9. Она позволяет определить длину руки по заданным значениям длины тела и обхвата груди. Пусть, например, длина тела равна 161 *см* и обхват груди 84 *см*. Отыскав пометки 161 и 84 на крайних шкалах и соединив их линейкой или нитью, мы найдем на пересечении линейки или нити со средней шкалой искомый ответ 72,6. Легко проверить, что номограмма даст те же результаты, что и табл. 27, но, кроме того, она позволяет находить любые промежуточные значения (например, мы найдем, что при росте 165 *см* и обхвате груди 90 *см* длина руки должна быть в среднем равна 74,4 *см*).

Построение номограммы несложно. Оно заключается в следующем. Берем лист миллиметровой бумаги желательной величины, допустим 35 *см* $\times$ 20 *см*, причем для рабочей площади возьмем 30 *см* $\times$ 15 *см*. На ней строятся три шкалы; при этом расстояние между крайними шкалами выбирается равным 15 *см*, а длины шкал 30 *см*. Эти величины — произвольные; их выбор определяется удобствами построения рисунка и пользования номограммой. В общем виде обозначим ширину рабочей части через $\bar{x}$, длину через $\bar{y}$, так что $\bar{x} = 15$ *см*, $\bar{y} = 30$ *см*.

На шкалах нанесены значения трех переменных в определяемых ниже масштабах. На крайних шкалах наносятся значения независимых переменных x_2 и x_3, в нашем случае длины тела и обхвата груди, на средней — значения искомой величины, длины руки. Положение средней шкалы подлежит определению. Масштабы переменных и расстояния между крайними и средней шкалой зависят от размаха изменчивости размеров и от параметров корреляционного уравнения

$$x_1 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \tag{10}$$

или в нашем случае

$$x_1 = 10{,}1398 + 0{,}3574\, x_2 + 0{,}0583\, x_3. \tag{9}$$

Размах изменчивости признаков обозначим разностью $x' - x''$, где один штрих относится к высшему, два — к низшему значению пере-

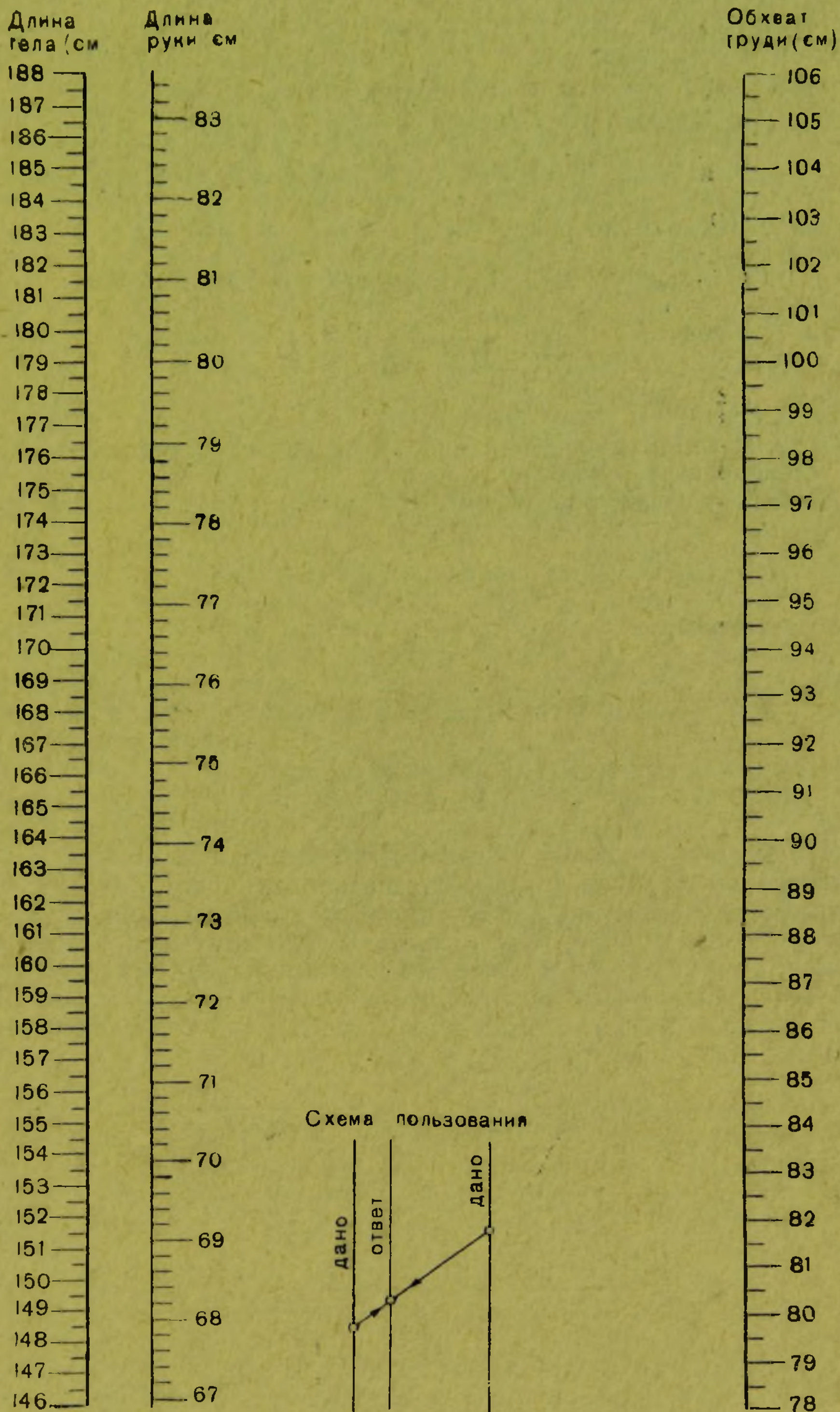


Рис. 9. Номограмма 2. Нахождение длины руки по длине тела и обхвату груди

менной. Размах берется с таким расчетом, чтобы было охвачено почти все население. Он составляет для роста (188 — 146) *см* = 42 *см*; для обхвата груди (106 — 78) *см* = 28 *см*. Высшее и низшее значения искомой переменной, длины руки, находятся из уравнения (9), а в общем виде из уравнения (10) подстановкой в него x_i' и x_i''.

В нашем случае наибольшее значение x_1 равно

$$x_1' = 10{,}1398 + 0{,}3574 \cdot 188 + 0{,}0588 \cdot 106 = 83{,}56 \text{ см},$$

наименьшее значение равно

$$x_1'' = 10{,}1398 + 0{,}3574 \cdot 146 + 0{,}0588 \cdot 78 = 66{,}90 \text{ см}$$

и размах равен

$$x_1' - x_1'' = 83{,}56 - 66{,}90 = 16{,}66 \text{ см}.$$

Наибольшие и наименьшие значения размеров проставляются в качестве верхних и нижних пометок соответствующих шкал, как это сделано на рисунке[1].

Масштабы шкал, обозначаемые буквой m, определяются формулой

$$m = \frac{\bar{y}}{x' - x''}.$$

В нашем случае

$$m_1 = \frac{300}{16{,}66} = 18{,}0072 \text{ мм}, \qquad m = \frac{300}{42} = 7{,}1429 \text{ мм},$$

$$m_3 = \frac{300}{28} = 10{,}7143 \text{ мм}.$$

Это значит, что в одном сантиметре значений длины руки содержится 18 *мм* средней шкалы, на шкале же роста пометки целых сантиметров отделены друг от друга расстоянием 7 *мм*, а на шкале обхвата груди 10,7 *мм*; между ними можно поставить любое число промежуточных значений. Остается найти положение средней шкалы. Для этого обозначим расстояние от нее до шкалы x_2 через x_2x_1, а расстояние до другой через x_1x_3. Длины этих отрезков определяются по формулам:

$$x_2x_1 = \frac{\bar{x}\, m_2 a_3}{m_2 a_3 + m_3 a_2}, \qquad x_1x_3 = \frac{\bar{x}\, m_3 a_2}{m_2 a_3 + m_3 a_2}.$$

В нашем примере:

$$x_2x_1 = \frac{150 \cdot 7{,}1429 \cdot 0{,}0588}{7{,}1429 \cdot 0{,}0588 + 10{,}7143 \cdot 0{,}3574} = 14{,}8 \text{ мм}$$

$$x_1x_3 = \frac{150 \cdot 10{,}7143 \cdot 0{,}3574}{7{,}1429 \cdot 0{,}0588 + 10{,}7143 \cdot 0{,}3574} = 135{,}2 \text{ мм}.$$

Очевидно, что $x_2x_1 + x_1x_3 = \bar{x}$; действительно, $14{,}8 + 135{,}2 = 150$. Следовательно, средняя шкала отстоит от левой на расстоянии 14,8 *мм* и от правой на расстоянии 135,2 *мм*.

Таким способом найдены все элементы номограммы.

---

[1] На средней шкале крайние значения не обозначены.

Глава III

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТРЕБНОГО АССОРТИМЕНТА

Для того чтобы система размерных вариантов изделий массового производства приводила к наибольшей удовлетворенности населения при заданном числе вариантов или к наименьшему числу вариантов при заданной степени удовлетворенности, необходимо выпускать и распределять различные варианты в нужных количественных соотношениях. Составление лучших количественных соотношений или лучшего ассортимента изделий можно считать заключительной стадией работы по построению системы стандартов. При условии нормального распределения сочетаний количественных признаков, теоретическая сторона построения потребного ассортимента как по одному, так и по двум главным размерам не встречает затруднений. Трудности могут заключаться лишь в вычислительной технике. Однако и они в значительной мере устраняются применением вспомогательных таблиц и номограмм.

§ 1. Одноразмерная система

Для определения численностей различных размеров в населении служат таблицы нормального распределения [приложение 4, (I)] и его номограмма 1, (I). Их применение в общем виде излагается в первой нашей статье (стр. 19 и сл.) и не нуждается в подробном описании. Поэтому для иллюстрации приложений нормального распределения к построению ассортимента ограничимся лишь одним примером пользования номограммой.

Допустим, что требуется найти относительные численности групп, которым подойдут швейные изделия, сшитые применительно к следующим пяти ростам:

Таблица 28

Номера групп по росту

Номера групп	1	2	3	4	5
Рост в *см*	155	161	167	173	179

При этом средняя $M = 165$ *см*, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5{,}5$ *см*.

Строим интервалы с центрами в заданных значениях роста. Расстояния между номерами равны 6 *см*. Поэтому границы интервалов располагаются так:

Таблица 29

Интервалы роста

Номера групп	Центральные значения (в *см*)	Границы (в *см*)
1	155	152—158
2	161	158—164
3	167	164—170
4	173	170—176
5	179	176—182

Теперь рассчитаем отклонения границ интервалов от средней. Получаем табл. 30.

Таблица 30

Отклонения границ интервалов от средней

Номера групп	Отклонения границ от средней (в *см*)
1	— 13 до — 7
2	— 7 до — 1
3	— 1 до + 5
4	+ 5 до + 11
5	+ 11 до + 17

Далее надлежит нормировать полученные отклонения, т. е. поделить на среднее квадратическое отклонение или на 5,5 (или же помножить на 0,182). Получим после округлений табл. 31.

Таблица 31

Нормирование границ интервалов

Номера групп	Нормированные границы интервалов
1	— 2,37 до — 1,27
2	— 1,27 до — 0,18
3	— 0,18 до + 0,91
4	+ 0,91 до + 2,00
5	+ 2,00 до + 3,09

Наконец, остается определить численность лиц в этих интервалах. Искомые значения легко находятся при помощи номограммы 1, (I).

Так, соединяя пометку 2,4 (вместо 2,37) на одной шкале с пометкой 1,27 на другой, найдем на средней шкале 10%, пометку же 1,27 с пометкой 0,18—найдем 33% и т. д. Расчеты удобно вести в форме следующей таблицы 32.

Таблица 32

Вычисление ассортимента при одноразмерной системе стандартов

Номера групп	Центральные значения групп (в *см*)	Границы (в *см*)	Отклонения границ от средней	Нормированные значения границ интервалов (t)	Численности групп в % (по номограмме), P
1	155	152—158	— 13 до — 7	— 2,37 до — 1,27	10
2	161	158—164	— 7 до — 1	— 1,27 до — 0,18	33
3	167	164—170	— 1 до 5	— 0,18 до + 0,91	39
4	173	170—176	5 до 11	+ 0,91 до + 2,00	16
5	179	176—182	11 до 17	+ 2,00 до + 3,09	2
				Итого . . .	100

§ 2. Двухразмерная система

Построение ассортимента по сочетаниям 2-х размеров технически сложнее, чем по одному. Точный способ заключается в применении формулы (16), (I). Но вычисления по этой формуле очень громоздки. Между тем желаемые результаты с ограниченной, но вполне достаточной для практики точностью могут быть получены с помощью составленных нами вспомогательных таблиц или номограмм.

а) Применение вспомогательных таблиц

Таблицы дают возможность приближенных вычислений для случаев, когда классовые интервалы не менее 0,1σ. Вычисления производятся по формуле, приближенно выражающей численность сочетания x_1 и x_2 в интервале $\Delta_1\Delta_2$, обозначаемую через $P(x_1x_2)$, при помощи многочлена[1]:

$$P(x_1x_2) = [P_o + P_1r + P_2r^2 + P_3r^3 + P_4r^4 + P_5r^5]\ \Delta_1\Delta_2.$$

Значения степеней коэффициентов корреляции вычислены и приводятся в табл. 50. Точно так же вычислены (в Институте антропологии) зависящие от x_1 и x_2 значения коэффициентов P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5. Они приведены в таблицах 51*а*, 51*б* и 51*в*. Последние построены так, что на одной странице помещено по две таблицы, каждая из которых имеет форму треугольника. Так, в табл. 51*а* даются значения, относящиеся к P_0, в правом верхнем треугольнике и к P_1 — в левом нижнем треугольнике, в таблице 51*б* — значения, относящиеся к P_2 в правом верхнем, и к P_3 в—левом нижнем и т. д. Значения, относящиеся к P, находятся на пересечении столбцов и строк, причем всегда за x_1 принимается то, которое по абсолютной величине больше. К каждому из найденных значений для получения P следует приписать 0,. При этом если x_1 и x_2 разных знаков, то у P_1, P_3 и P_5 следует переменить знак на обратный. Например, требуется отыскать P_2 для сочетания —1,8 и +1,9. За x_1 принимается 1,9, за x_2 1,8; P_2 для них находится в таблице 51*б* в правом верхнем треугольнике. На пересечении x_1 и x_2 стоит 0151; следовательно, P_2 равно 0,0151. Для тех же значений P_3 (также таблица 51*б*, нижний треугольник) находим 0004, следовательно, $P_3 = -0{,}0004$ (меняется знак!).

Для примера допустим, что требуется найти относительные численности групп, которым подойдут швейные изделия, сшитые для следующих сочетаний обхвата груди (номеров) и роста (подномеров).

Таблица 33

Номера по обхвату груди

Номера групп	1	2	3	4	5
Обхват груди (в *см*)	80	84	88	92	96
Номера изделий	44	46	48	50	52

Таблица 34

Подномера по росту

Подномера групп	1	2	3	4	5
Рост в *см*	155	161	167	173	179

Параметры распределения:

	M	σ
Обхват груди (в *см*)	89	5
Рост (в *см*)	168	7

$r = 0{,}45$

[1] Ряд является доведенным до 6-го члена разложением нормальной плотности вероятности $f(x_1x_2)$ по степеням r: $f(x_1x_2) = \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_1)\, f^{(n)}(x_2)\, r^n$,

где $f(x_1)$ и $f(x_2)$—нормальные плотности вероятностей x_1 и x_2.

Решить предложенную задачу—значит заполнить следующую форму:

Форма таблицы. Распределения численностей сочетаний обхвата груди с ростом

Обхват груди (в *см*) \ Рост (в *см*)	До 155	161	167	173	179 и выше	Итого
До 80						
84						
88						
92						
96 и выше						
Итого						

Прежде всего значения признаков следует нормировать, т. е. выразить их в виде отклонений от средней, поделенных на σ. Следовательно, вместо обхвата груди 80[1] берем $(80-89):5=-1{,}8$, вместо 84 берем $(84-89):5=-1{,}0$ и т. д.; вместо роста 155 берем $(155-168):7=-1{,}9$ и т. д. После этих преобразований подлежащая заполнению таблица получает вид:

Таблица 35

Распределение численностей сочетаний обхвата груди с ростом для нормированных значений [2]

Обхват груди \ Рост	−1,9	−1,0	−0,1	0,7	1,6	Итого
−1,8	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
−1,0	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	
−0,2	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	
+0,6	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	
+1,4	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	
Итого						

Имеется контроль вычислений: нормированные интервалы по обхвату груди равны 0,8, по росту 0,9, за одним исключением (от $-0{,}1$ до $+0{,}7$ равно 0,8), объяснимым округлениями.

Искомые значения клеток заполняются при помощи табл. 51 приложения. Так, чтобы найти численность для первой верхней клетки, т. е. для клетки (1) нужно входить в табл. 51 со значениями $x_1=1{,}9$ и $x_2=1{,}8$; найденные значения P_n помножаются на r^n, которые берутся из табл. 50. Произведения складываются, и итог умно-

[1] Пренебрегая здесь пометками „до“ и „выше“.

[2] В скобках для удобства дальнейшего изложения приведены номера клеток.

жается на $\Delta_1\Delta_2$ или в данном случае на 0,72 ($=0,8 \cdot 0,9$). Расчеты расположим следующим образом:

Таблица 36

Вычисление частоты сочетания —1,9 и —1,8

n	P_n	r^n	$P_n r^n$
0	0,0052	1,0000	0,0052
1	0,0177	0,4500	0,0080
2	0,0151	0,2025	0,0031
3	0,0004	0,0911	0,0000
4	0,0072	0,0410	0,0003
5	0,0082	0 0185	0,0002
		Итого	0,0168

$$P\,(-1,9-1,8)=0,0168 \cdot 0,72=0,012.$$

Отсюда численность сочетания оказывается равной 1,2%.

В качестве другого примера рассчитаем численность клетки (19), для которой $x_1=0,7$ и $x_2=0,6$. Оба отклонения положительные, поэтому все числа из табл. 51 берутся с их знаками. Расчеты расположим тем же способом.

Таблица 37

Вычисление частоты сочетания 0,7 и 0,6

n	P_n	r^n	$P_n r^n$
0	0,1041	1,0000	0,1041
1	0,0437	0,4500	0,0197
2	0,0170	0,2025	0,0034
3	0,0483	0,0911	0,0044
4	0,0013	0,0410	0,0001
5	0,0434	0,0185	0,0008
		Итого	0,1325
			$\times$ 0,72
			$P=9,5\%$

В качестве третьего примера определим численность клетки (9); отклонения имеют разные знаки; поэтому следует соблюдать указанные правила знаков.

Таблица 38

Вычисление частоты сочетания —1,0 и 0,7

n	P_n	r^n	$P_n r^n$
0	0,0756	1,0000	0,0756
1	— 0,0529	0,4500	— 0,0238
2	0,0000	0,2025	0,0000
3	— 0,0443	0,0911	— 0,0040
4	— 0,0019	0,0410	— 0,0001
5	— 0,0273	0,0185	— 0,0005
		Итого	0,0472
			$\times$ 0,72
			$P=0,0340=3,4\%$

Таким же способом может быть определена численность всякой другой клетки. В результате получится следующая таблица:

Таблица 39

Распределение численностей сочетаний обхвата груди с ростом в %

Обхват груди (в *см*) \ Рост (в *см*)	До 155	161	167	173	179 и выше	Итого
До 80	1,2	2,5	1,9	0,6	0,1	6,3
84	2,1	6,4	7,2	3,4	0,6	19,7
88	1,6	7,5	12,5	8,5	2,1	32,2
92	0,6	3,9	9,8	9,5	3,6	27,4
96 и выше	0,1	0,9	3,5	4,8	2,7	12,0
Итого	5,6	21,2	34,9	26,8	9,1	97,6

В качестве другого примера остановимся на случае, когда система содержит 9 вариантов табл. 25, которую мы здесь и воспроизведем.

Таблица 25

Система 9 вариантов стандартов

Рост в *см* (подномера) \ Обхват груди в *см* (номера)	84	88	92
1	158	161	164
2	164	167	170
3	170	173	176

Параметры:

	M	σ
Обхват груди (в *см*)	88	4
Рост (в *см*)	167	6

$$r = 0{,}50$$

Нормируя значения, получаем следующую таблицу:

Таблица 40

Система 9 вариантов (для нормированных значений признаков)

Рост (подномера) \ Обхват груди (номера)	-1	0	$+1$
1	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$
2	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$
3	$+0{,}5$	$+1$	$+1{,}5$

Как видно из таблицы, вычислять нужно численности всего пяти сочетаний 1,5 и 1; 1 и 0,5; 1 и 0; 1 и —0,5; 0 и 0. Расчеты производятся очень легко. Они приведены в прилагаемой табл 41.

В результате получаем относительные численности сочетаний номеров и подномеров, представленные в таблице 42.

Таблица 41

Вычисление ассортимента

n	x_1 и x_2 / r^n	1,5 и 1		1 и 0,5		1 и 0		1 и −0,5		0 и 0	
		P_n	$P_n r^n$	P_n	$P_n r^n$	P_n	$P_n r^n$	P_n	$P_n r^n$	P_n	$P_n r^n$
0	1,00	0,0313	0,0313	0,0852	0,0852	0,0965	0,0965	0,0852	0,0852	0,1592	0,1592
1	0,50	0,0470	0,0235	0,0426	0,0213	0,0000	0,0000	−0,0426	−0,0213	0,0000	0,0000
2	0,25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0796	0,0199
3	0,125	0,0118	0,0015	0,0390	0.0049	0,0000	0,0000	−0,0390	−0,0049	0,0000	0,0000
4	0,0625	0,0142	0,0009	−0,0111	−0,0007	−0,0241	−0,0015	−0,0111	−0,0007	0,0597	0.0037
5	0,0313	−0,0057	−0,0002	0,0268	0,0008	0,0000	0,0000	−0,0268	−0,0008	0,0000	0,0000
	Итого		0,0570		0,1115		0,0950		0,0575		0,1828
	Численность в %		5,7		11,2		9,5		5,8		18,3

Таблица 42

Численности сочетаний номеров (по груди) с подномерами (по росту) в %

Подномера по росту / Номера по груди	1	2	3	Итог
1	5,7	9,5	5,8	21,0
2	11,2	18,3	11,2	40,7
3	5,8	9,5	5,7	21,0
Итого	22,7	37,3	22,7	82,7

б) Применение номограмм

Если довольствоваться ограниченной точностью, например, до целых процентов, то во многих случаях относительные численности вариантов можно найти очень простым способом, а именно при помощи номограмм 3 и 4, которые приводятся ниже (рис. 10 и 11). Для каждого вычисления требуется две номограммы. Одна из них, 3-я, служит для отыскания вспомогательной величины c по данным нормированным значениям двух переменных и коэффициенту корреляции между ними[1], другая—4-я для определения искомой численности сочетаний в процентах[2].

Номограмма 3 (для определения c по x_1, x_2 и r) содержит слева шкалу r с пометками от 1 до 0 и от 0 до 1; верхняя половина относится к случаям, когда x_1 и x_2 имеют одинаковые знаки, нижняя—когда знаки x_1 и x_2 — разные; справа расположено поле, на котором нанесена сетка со шкалой, помещенной направо. Шкала содержит значения x_1 x_2 и c[3]. Точка на поле обозначает заданное сочетание x_1 и x_2, а пересечение линии, соединяющей эту точку и требуемое значение r_1, дает на правой шкале ответ. Пусть, например, $x_1 = 1{,}00$, $x_2 = 0{,}50$, $r = 0{,}50$. Найдем линию, проходящую через пометку 0,50 на правой шкале или на верхней границе поля. Затем отыщем линию 1,00 и найдем точку пересечения этих двух линий. Ее удобно зафиксировать ножкой циркуля или иглой. После этого отыщем на верхней половине шкалы r точку 0,50. Соединяя две найденные точки и продолжая нить до пересечения с правой шкалой, получим ответ: $c = 0{,}87$. Тот же ответ получится, если $x_1 = -1{,}00$ и $x_2 = -0{,}50$; но если $x_1 = 1{,}00$ и $x_2 = -0{,}50$, то пометка берется на нижней половине шкалы и получаем $c = 1{,}32$.

Получив значение c, обращаемся к номограмме 4. Она содержит в левой части сетку; вертикальными координатами сетки служат значения величины c, а каждая кривая соответствует определенному коэффициенту корреляции r, значения которого можно прочесть на левой границе наверху и на правой границе внизу. С правой стороны номограммы расположены три шкалы; из них первая— немая вспомогательная; она содержит ординаты точек поля; 3-я крайняя справа шкала, $\Delta_1\Delta_2$, содержит интервалы между размерами вариантов и, наконец, средняя между ними—шкала ответа. Чтобы найти его, нужно отыскать на сетке точку пересечения полученного значения c с заданным значением r и, проведя от нее горизонтальную линию, найти точку пересечения этой линии с вспомогательной немой шкалой. Найденную точку соединяем с заданным значением $\Delta_1\Delta_2$. Пересечение соединяющей линии с средней шкалой дает ответ. Так, в нашем примере находим приближенно положение вертикальной линии $c = 0{,}87$ между $c = 0{,}8$ и 0,9 и отыскиваем кривую для $r = 0{,}5$. Точка пересечения приходится на том месте, где все кривые очень близки друг к другу. Фиксируем найденную точку ножкой циркуля или иглой и определяем ее ординату на немой шкале, в которую и переносим ножку циркуля или иглу. Теперь нужно взять величину $\Delta_1\Delta_2$. Если она равна 1, то, соединяя фиксированную точку немой шкалы с точкой 1 на шкале $\Delta_1\Delta_2$, получаем ответ—11%; если же

[1] Ср. формулу (11, (I)).
[2] Ср. формулу (12, (I)).
[3] Для удобства пользования те же значения нанесены на кривую, ограничивающую сетку сверху.

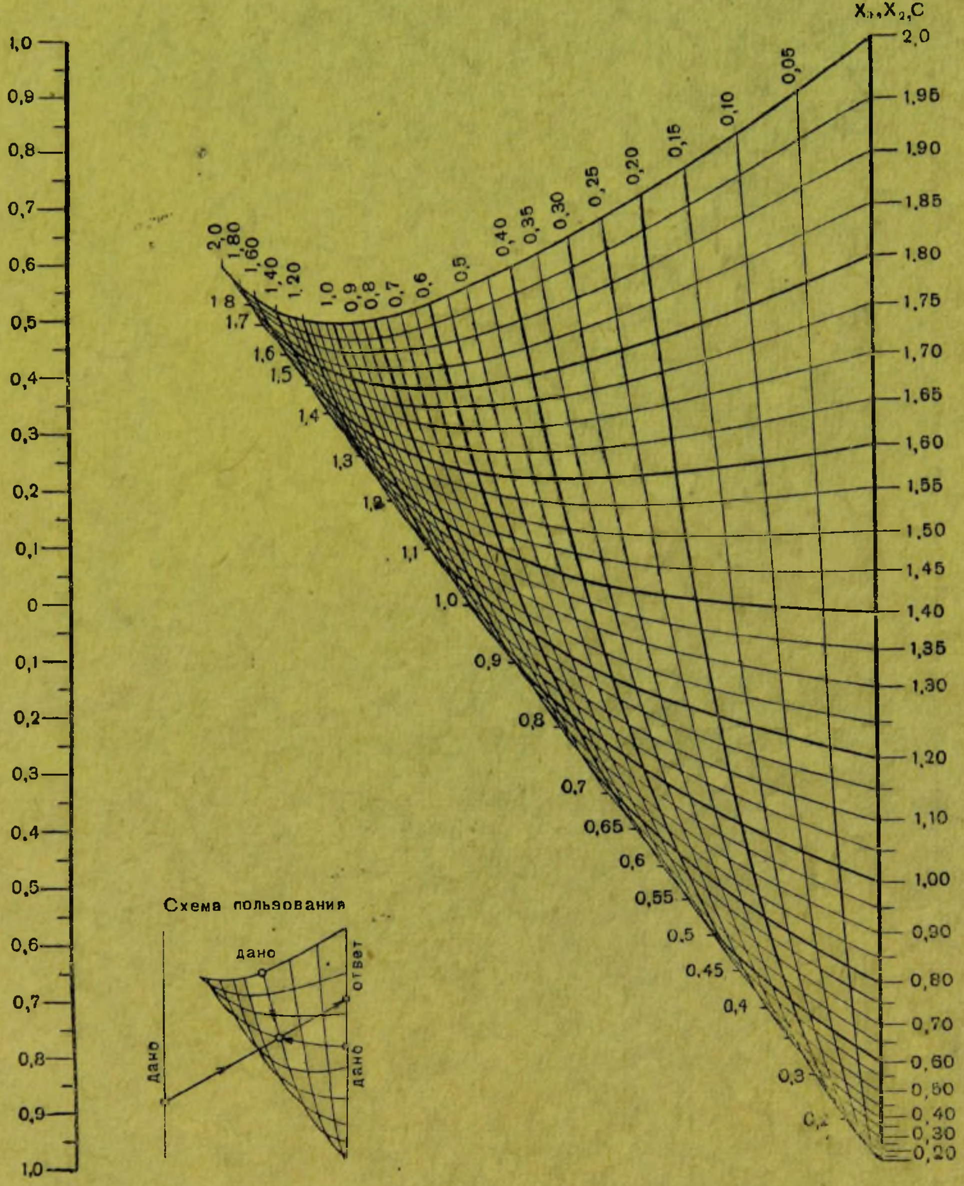


Рис. 10. Номограмма 3. Нахождение величины *c*

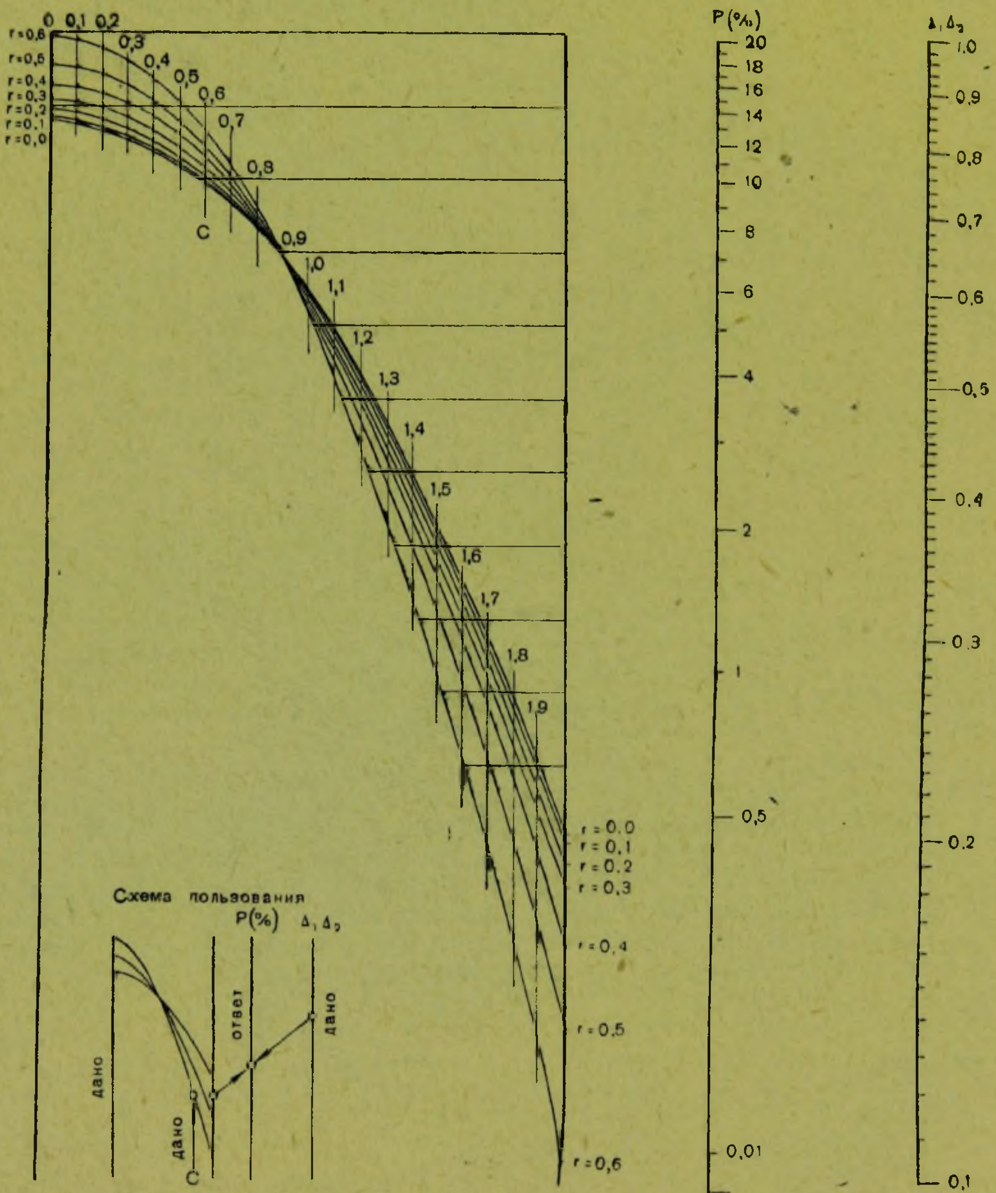


Рис. 11. Номограмма 4. Нахождение ассортимента

интервалы между размерами равны $^1/_2$ σ, то $\Delta_1 \Delta_2 = 0,25$, ответ будет—2,7, или с округлением 3%.

Найдем в качестве второго примера частоту сочетания 1 и —0,5, для которого выше получено $c = 1,32$. Теперь точка пересечения c и r лежит в части сетки с большими делениями, а ее ордината — на немой шкале значительно ниже. Соединяя эту ординату с пометкой $\Delta_1\Delta_2 = 1$, найдем для этого случая ответ округленно 6%, а при $\Delta_1\Delta_2 = 0,25$ получим около 1,5%.

Как видно из примеров, ответ при помощи номограммы, не требуя вычислений (кроме предварительного нормирования значений размеров), находится очень быстро.

В виде упражнения можно проверить произведенный ранее расчет численностей 9 вариантов табл. 25. Нормируя значения признаков, имеем (см. табл. 40):

Таблица 43

Система 9 вариантов

Рост \ Обхват груди	— 1	0	+ 1
1	— 1,5	— 1	— 0,5
2	— 0,5	0	+ 0,5
3	+ 0,5	+ 1	+ 1,5

Легко убедиться, что получится следующий результат, почти совпадающий с числами табл. 42, найденными более точным способом:

Таблица 44

Численности сочетаний номеров по груди с подномерами (по росту) в %

Подномера по росту \ Номера по груди	1	2	3
1	6	9,5	6
2	11	18	11
3	6	9,5	6

Расчеты при помощи номограммы выполняются несравненно быстрее, чем каким-либо иным способом. Однако номограммы помимо пониженной точности имеют еще один недостаток, заключающийся в том, что при больших отклонениях размеров от своих средних они дают ненадежные результаты. Поэтому они применимы лишь для определения численностей центральных вариантов, примерно в объеме, соответствующем 80—85% всей совокупности. Если большая точность и детальность имеют практическое значение, то необходимо пользоваться таблицами, но в этом случае применение номограмм может послужить хорошим контролем производимых вычислений.

§ 3. О степени точности вычисления ассортимента

При недостатке прямых указаний для определения средних, средних квадратических отклонений и коэффициентов корреляции в их оценках неизбежно допускается доля условностей. Не всегда можно поручиться, что, например, принятая для вычислений средняя роста не отклоняется от действительной, хотя бы на 1 *см*, или что принятый коэффициент корреляции не расходится с действительным хотя бы на 0,05. Поэтому практически важно определить, как подобные смещения оценок параметров могут отразиться на результатах вычисления потребного ассортимента. В качестве меры погрешности мы принимаем, как было отмечено выше (глава 1, § 4 (I)), величину просчета, получающегося при замене истинного параметра смещенным, или относительное число лиц, для которых не окажется подходящих размерных вариантов в ассортименте, построенном по смещенным оценкам. Другими словами, погрешность выражает относительную численность лиц, неудовлетворенных набором.

Особенное значение имеет погрешность из-за смещения средней, так как этот параметр более всего отражает сдвиги в составе населения и изменения его физического развития. Представление о погрешности (П), происходящей при смещении средней ($\delta_м$), дается в табл. 45 и на рисунке 12[1].

Таблица 45

Погрешность (в %) при смещении средней, выраженном в долях σ

Смещение ($\delta_м$)	Погрешность (П)
0	0,0
0,25	9,9
0,50	19,7
0,75	29,2
1,00	38,3
1,25	46,8
1,50	54,7
1,75	61,8
2,00	68,3
2,50	78,9
3,00	86,6

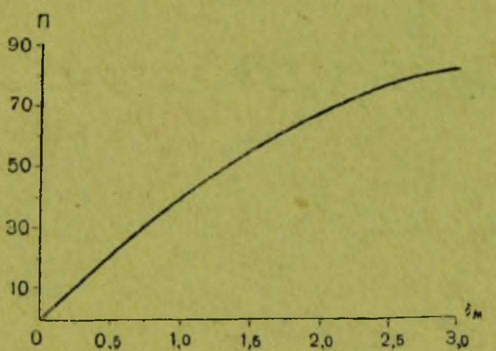


Рис. 12. Погрешность (П) (в %) при смещении средней ($\delta_м$)

Приведенные данные показывают, что уже при расхождении порядка $^1/_4\ \sigma$ просчет достигает заметных размеров, но, например, $^1/_4\sigma$ по росту составляет $1^1/_2$ сантиметра. Поэтому перенесение ростовочного ассортимента, построенного для группы с средним ростом 168,5 *см*, на группу населения, имеющую средний рост 167 *см*, ведет к погрешности порядка 10%. При смещении средних по росту 6 *см* просчет достигает уже весьма большой величины — 40%, а если смещение равно $2\sigma = 12$ *см*, то удовлетворенность населения размерами

[1] Числовое выражение погрешности находится по таблицам значений $F(t)$, табл. 19, (I) или по номограмме 1 (I) при $t = \frac{M_1 - M_2}{2\sigma}$.

будет равна всего лишь 32%. Мы видим, что точность определения средней арифметической имеет несравненно большее значение, чем учет таких деталей распределения, как скошенность или эксцесс. В то же время можно сделать некоторые заключения о допустимых размерах погрешности в определении средней. Так, если считать приемлемым просчет до 5%, то расхождение средних допустимо до $^1/_8\,\sigma$. По росту это составляет $^3/_4$ *см*, по обхвату груди $^1/_2$ *см*, по длине стопы $1^1/_2$ *мм*. Следовательно, по росту и обхвату груди допустимо округление до 1 *см*; по длине стопы до $1^1/_2$ *мм*.

К просчету может привести также расхождение между средними квадратическими отклонениями. Зависимость погрешности П от величины смещения δ_σ представлена на табл. 46 и на рис. 13[1].

Таблица 46

Погрешность (в %) при смещении квадратического отклонения (σ), выраженном в долях σ

Смещение (δ_σ)	Погрешность (П)
0	0
0,1	4,6
0,2	8,8
0,3	12,6
0,4	16,1
0,5	19,4
0,6	22,3
0,7	25,1
0,8	27,6
0,9	30,0
1,0	32,3

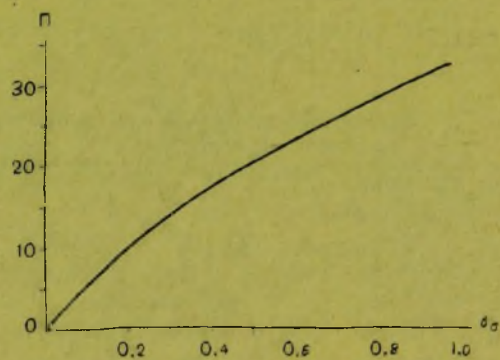


Рис. 13. Погрешность (П) (в %) при смещении среднего квадратического отклонения (δ_σ)

Из таблицы и графиков видно, что погрешность из-за смещения среднего квадратического отклонения достигает почти таких же значений, как просчет вследствие несоответствия средних. Но нельзя упускать из виду, что территориальная изменчивость среднего квадратического отклонения несравненно меньше той же изменчивости средних. Так, например, по росту мужчин размах изменчивости средних в различных территориальных группах составляет 21 *см*: от 150 *см* (Кировская область) до 171 *см* в некоторых группах русского населения (в Сибири, Средней Азии); это дает примерно две среднерусских сигмы. Изменчивость же средних квадратических отклонений заключена в границах от 5,2 до 6,8 *см*, что составляет всего одну четверть той же среднерусской сигмы. И в то время как просчет вследствие расхождения средних может доходить до 68%, просчет

---

[1] Вычислено по выведенной нами формуле:

$$П = 2\left|\Phi(t) - \Phi\left(\frac{t}{k}\right)\right|, \text{ где } t = 2{,}1460\sqrt{\frac{k^2}{k^2-1} - \log_{10} k},\quad k = \frac{\sigma_1}{\sigma}\ (>1).$$

Получается из решения системы уравнений двух нормальных кривых с средними квадратическими отклонениями σ и σ_1.

из-за смещения средних квадратических отклонений не превышает 10%, причем и этот размер погрешности достигается лишь в исключительных случаях. Поэтому почти без всякого риска мы в праве принимать для данного пола и возраста некоторую стандартную сигму, что совершенно невозможно для средних арифметических. Мы можем также сделать заключение о допустимых размерах погрешности в определении среднего квадратического отклонения. Так, если считать приемлемым просчет до 5%, то расхождение средних квадратических допустимо до $^1/_{16}\ \sigma$. Для роста это составляет примерно 0,375 *см*, для обхвата груди 0,25 *см*. И в том и в другом случае можно считать позволительными округления до 0,5; но округления до целых чисел уже являются опасными.

Рассмотрение величины погрешностей, происходящих от смещения средней арифметической и среднего квадратического отклонения, дало возможность выяснить относительное влияние каждого из этих смещений в отдельности. В действительности же имеет место одновременное смещение обоих параметров. При этом не следует думать, что совокупное действие смещений дает простую сумму их действий. Дело в том, что деформация распределения за счет изменения среднего квадратического отклонения может повлечь известную компенсацию погрешности, происходящей за счет сдвига средней. Представление о совокупном действии двух смещений дает прилагаемая таблица. Смещение средней обозначено в ней через $\delta_м \left(= \frac{M_1 - M}{\sigma}\right)$, смещение среднего квадратического отклонения через $\delta_\sigma \left(= \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma}\right)$.

Таблица 47

Погрешность (в %) при одновременных смещениях средней арифметической и среднего квадратического отклонения [1]

Смещение M ($\delta_м$) / Смещение σ (δ_σ)	± 0	$\pm 0{,}5$	$\pm 1{,}0$	$\pm 1{,}5$	$\pm 2{,}0$
— 0,5	32,3	34,0	39,0	46,8	54,7
— 0,25	13,7	20,6	34,8	49,0	61,55
0	0	19,7	38,3	54,7	68,3
0,25	10,8	19,65	35,3	50,1	63,0
0,5	19,4	23,8	34,6	47,2	59,0
0,75	26,4	27,4	36,25	45,9	56,3
1,0	32,3	34,0	38,9	46,8	54,7

[1] Вычислено по формуле: $П = |\Phi(t_1) - \Phi(t)| + |\Phi t'_1 - \Phi(t')|$, где t и t' сопряженные корни выражения:

$$t = -\frac{\delta_м}{k^2 - 1} \pm \sqrt{\frac{k^2(\delta_м)^2}{(k^2-1)^2} + \frac{2k^2 \ln k}{k^2 - 1}}, \quad t_1 = \frac{t}{k} - \frac{\delta_м}{k},$$

$$k = \frac{\sigma_1}{\sigma} (>1), \qquad \delta_м = \frac{M_1 - M}{\sigma} (>0).$$

Находится из решения системы уравнений двух нормальных кривых с средними арифметическими M и M_1 и средними квадратическими отклонениями σ и σ_1.

Из таблицы можно сделать вывод, что совокупное действие смещения двух параметров меньше, чем простая сумма действий смещения каждого параметра. Так, например, если смещение средней составляет $+\sigma$, то просчет равен 38,3%, смещение среднего квадратического отклонения на $^1/_2\ \sigma$ дает погрешность на 19,4%, а совокупное действие обоих смещений не 57,7%, а всего 34,6%.

Следует отметить, что при смещении двух параметров суммарная погрешность близка к большему значению погрешности, получающемуся при смещении каждого параметра отдельно.

Это же относится и к смещению средних двух основных размеров, что видно из прилагаемых таблиц.

Таблица 48

Погрешность (в %) при смещениях двух средних для $r=0{,}5$
Смещения выражены в долях σ

а) смещения одного знака (+)

$\delta_2 \backslash \delta_1$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
0,00	0	11	23	33	44
0,25	11	11	20	30	40
0,50	23	20	23	30	38
0,75	33	30	30	33	40
1,00	44	40	38	40	44

б) смещения разных знаков (±)

$\delta_2 \backslash \delta_1$	0,00	−0,25	−0,50	−0,75	−1,00
0,00	0	11	23	33	44
+0,25	11	20	30	40	49
+0,50	23	30	38	47	55
+0,75	33	40	47	54	62
+1,00	44	49	55	62	68

Из таблиц видно, что разность знаков смещений увеличивает величину погрешности. Если же расхождения одного знака, то совокупное действие смещений проявляется неодинаково. В одних случаях погрешность хотя и увеличивается по сравнению с той, которая получается для каждого признака отдельно, но она остается меньше, чем сумма двух погрешностей. Допустим, к примеру, что одежда, сшитая для среднего обхвата груди 88 *см* и среднего роста 167 *см*, послана в район, в котором средняя по обхвату груди 89 *см*, а средняя по росту 173 *см*. Этот набор будет неподходящим для 10% группы по груди и 38% по росту[1]. Но окажется некоторое число случаев, когда образец, неподходящий по груди, одновременно не подойдет и по росту. Такие случаи не могут быть общим явлением, поскольку между признаками нет функциональной связи (в математическом смысле) и расхождение по груди необязательно сопровождается расхождением по росту. Но так как одежда окажется неприемлемой, если она не подойдет хотя бы по одному признаку, то можно ожидать, что общий объем просчета будет приближаться к 44% (к сумме просчетов)[2]. Между тем в действительности при корреляции 0,5 он составляет лишь 40% (по табл. 48 при $\delta_1 = 0{,}25$ и $\delta_2=1$).

---

[1] При σ обхвата груди 4 *см* и σ роста 6 *см*.

[2] По формуле: $П=П_1+(1-П_1)\ П_2$, где П означает погрешность.

В других случаях корреляция влечет повышение погрешности по сравнению с простым суммированием. Представим себе, например, что смещение произошло лишь по одному размеру, например по росту, а обхват груди определен правильно. Выделим группу людей одинакового роста. Изменчивость груди этих людей, в силу корреляции с ростом, будет понижена, поэтому нормированная разница между средними по груди будет меньше, чем при независимости признаков. А это обозначает увеличение погрешности. Так, например, если смещение по обхвату груди равно $^1/_2\ \sigma$ (2 *см*), то при независимости от роста просчет составлял бы 20%. При корреляции же 0,5 он составляет 23%. Наконец, можно отметить случаи, когда погрешность определяется величиною большого смещения. Так, если $\delta_1 = {^1/_2}$ и $\delta_2 = 1$, то погрешность равна 38%, как раз столько же, сколько дает смещение средней на одну сигму (табл. 45).

Необходимо также рассмотреть вопрос о том, насколько велико влияние несоответствия коэффициентов корреляции. Представление о величине погрешности в зависимости от расхождения между коэффициентами корреляции приводится в табл. 49.

Таблица 49

Погрешность (в %) при смещении коэффициента корреляции

Смещение \ r	0,10	0,25	0,40	0,50
+ 0,05	1,7	1,9	2,2	2,6
+ 0,10	3,4	3,8	4,6	5,6
+ 0,15	5,1	5,9	7,3	8,8
+ 0,20	7,0	8,1	10,2	12,5

Из таблицы видно, что расхождение в коэффициентах корреляции порядка 0,10—0,15 не влечет заметной погрешности. Поэтому вполне допустимы округления коэффициентов корреляции до 0,05 и даже до первого десятичного знака.

Отмечено, что при сопоставлениях между полами и между различными территориальными группами коэффициенты корреляции отличаются большой устойчивостью. Поэтому (а также учитывая относительно малую величину погрешности при смещении коэффициентов корреляции) мы можем принимать для данной возрастной группы некоторый стандартный коэффициент.

Следует признать, что погрешность при определении потребного ассортимента изделий, составленного для какой-либо группы населения на основании статистических данных, вряд ли может быть устранена даже при самых тщательных расчетах. Это происходит из-за почти полной невозможности организовать повседневное наблюдение за динамикой распределения признаков в каждой отдельной группе населения. Всегда имеется риск приписать какой-нибудь группе не совсем те параметры, которые ее характеризуют. Поэтому вопрос о величине погрешности принимает большое практическое значение. Рассмотрение вопроса приводит к выводу, что наиболее существенное значение имеет расхождение средних, потому что, как было отмечено, на них больше всего отражаются сдвиги в составе населения и изменения его физического развития. Правда, даже очень заметные изменения антропологического состава населения не всегда требуют больших изменений потребного ассорти-

Степени коэффициентов корреляции

r	r^2	r^3	r^4	r^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5
0,01	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,26	0,0676	0,01758	0,00457	0,00119	0,51	0,2601	0,13265	0,06765	0,03450	0,76	0,5776	0,43898	0,33362	0,25355
0,02	0,0004	0,00001	0,00000	0,00000	0,27	0,0729	0,01968	0,00531	0,00143	0,52	0,2704	0,14061	0,07312	0,03802	0,77	0,5929	0,45653	0,35153	0,27068
0,03	0,0009	0,00003	0,00000	0,00000	0,28	0,0784	0,02195	0,00615	0,00172	0,53	0,2809	0,14888	0,07890	0,04182	0,78	0,6084	0,47455	0,37015	0,28872
0,04	0,0016	0,00006	0,00000	0,00000	0,29	0,0841	0,02439	0,00707	0,00205	0,54	0,2916	0,15746	0,08503	0,04592	0,79	0,6241	0,49304	0,38950	0,30771
0,05	0,0025	0,00013	0,00001	0,00000	0,30	0,0900	0,02700	0,00810	0,00243	0,55	0,3025	0,16638	0,09151	0,05033	0,80	0,6400	0,51200	0,40960	0,32768
0,06	0,0036	0,00022	0,00001	0,00000	0,31	0,0961	0,02979	0,00924	0,00286	0,56	0,3136	0,17562	0,09834	0,05507	0,81	0,6561	0,53144	0,43047	0,34868
0,07	0,0049	0,00034	0,00002	0,00000	0,32	0,1024	0,03277	0,01049	0,00336	0,57	0,3249	0,18519	0,10556	0,06017	0,82	0,6724	0,55137	0,45212	0,37074
0,08	0,0064	0,00051	0,00004	0,00000	0,33	0,1089	0,03594	0,01186	0,00391	0,58	0,3364	0,19511	0,11316	0,06564	0,83	0,6889	0,57179	0,47458	0,39390
0,09	0,0081	0,00073	0,00007	0,00001	0,34	0,1156	0,03930	0,01336	0,00454	0,59	0,3481	0,20538	0,12117	0,07149	0,84	0,7056	0,59270	0,49787	0,41821
0,10	0,0100	0,00100	0,00010	0,00001	0,35	0,1225	0,04288	0,01501	0,00525	0,60	0,3600	0,21600	0,12960	0,07776	0,85	0,7225	0,61413	0,52201	0,44371
0,11	0,0121	0,00133	0,00015	0,00002	0,36	0,1296	0,04666	0,01680	0,00605	0,61	0,3721	0,22698	0,13846	0,08446	0,86	0,7396	0,63606	0,54701	0,47043
0,12	0,0144	0,00173	0,00021	0,00002	0,37	0,1369	0,05065	0,01874	0,00693	0,62	0,3844	0,23833	0,14776	0,09161	0,87	0,7569	0,65850	0,57290	0,49842
0,13	0,0169	0,00220	0,00029	0,00004	0,38	0,1444	0,05487	0,02085	0,00792	0,63	0,3969	0,25005	0,15753	0,09924	0,88	0,7744	0,68147	0,59970	0,52773
0,14	0,0196	0,00274	0,00038	0,00005	0,39	0,1521	0,05932	0,02313	0,00902	0,64	0,4096	0,26214	0,16777	0,10737	0,89	0,7921	0,70497	0,62742	0,55841
0,15	0,0225	0,00338	0,00051	0,00008	0,40	0,1600	0,06400	0,02560	0,01024	0,65	0,4225	0,27463	0,17851	0,11603	0,90	0,8100	0,72900	0,65610	0,59049
0,16	0,0256	0,00410	0,00066	0,00010	0,41	0,1681	0,06892	0,02826	0,01159	0,66	0,4356	0,28750	0,18975	0,12523	0,91	0,8281	0,75357	0,68575	0,62403
0,17	0,0289	0,00491	0,00084	0,00014	0,42	0,1764	0,07409	0,03112	0,01307	0,67	0,4489	0,30076	0,20151	0,13501	0,92	0,8464	0,77869	0,71639	0,65908
0,18	0,0324	0,00583	0,00105	0,00019	0,43	0,1849	0,07951	0,03419	0,01470	0,68	0,4624	0,31443	0,21381	0,14539	0,93	0,8649	0,80436	0,74805	0,69569
0,19	0,0361	0,00686	0,00130	0,00025	0,44	0,1936	0,08518	0,03748	0,01649	0,69	0,4761	0,32851	0,22667	0,15640	0,94	0,8836	0,83058	0,78075	0,73390
0,20	0,0400	0,00800	0,00160	0,00032	0,45	0,2025	0,09113	0,04101	0,01845	0,70	0,4900	0,34300	0,24010	0,16807	0,95	0,9025	0,85738	0,81451	0,77378
0,21	0,0441	0,00926	0,00194	0,00041	0,46	0,2116	0,09734	0,04477	0,02060	0,71	0,5041	0,35791	0,25412	0,18042	0,96	0,9216	0,88474	0,84935	0,81537
0,22	0,0484	0,01065	0,00234	0,00052	0,47	0,2209	0,10382	0,04880	0,02293	0,72	0,5184	0,37325	0,26874	0,19349	0,97	0,9409	0,91267	0,88529	0,85873
0,23	0,0529	0,01217	0,00280	0,00064	0,48	0,2304	0,11059	0,05308	0,02548	0,73	0,5329	0,38902	0,28398	0,20731	0,98	0,9604	0,94119	0,92237	0,90392
0,24	0,0576	0,01382	0,00332	0,00080	0,49	0,2401	0,11765	0,05765	0,02825	0,74	0,5476	0,40522	0,29987	0,22190	0,99	0,9801	0,97030	0,96060	0,95099
0,25	0,0625	0,01563	0,00391	0,00098	0,50	0,2500	0,12500	0,06250	0,03125	0,75	0,5625	0,42188	0,31641	0,23730	1,00	1,0000	1,00000	1,00000	1,00000

Таблица 51 *а*

Значение P_0 и P_1

$\leftarrow P_0 \rightarrow$

P_0 — в верхнем правом треугольнике,
P_1 — в нижнем левом

x_1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	x_1 / x_2
	1592	1584	1560	1522	1469	1405	1329	1246	1156	1062	0965	0869	0775	0684	0597	0517	0443	0375	0315	0262	0215	0176	0142	0113	0089	0070	0054	0042	0032	0024	0018	0,0
		1576	1552	1514	1462	1398	1323	1240	1150	1056	0961	0865	0771	0680	0594	0514	0440	0373	0313	0261	0214	0175	0141	0113	0089	0070	0054	0041	0031	0024	0018	0,1
0,0	0000		1529	1491	1440	1377	1303	1221	1133	1041	0946	0852	0760	0670	0586	0506	0434	0368	0309	0257	0211	0172	0139	0111	0088	0068	0053	0041	0031	0023	0017	0,2
0,1	0000	0016		1455	1405	1343	1271	1191	1105	1015	0923	0831	0741	0654	0571	0494	0423	0359	0301	0250	0206	0168	0135	0108	0085	0067	0052	0040	0030	0023	0017	0,3
0,2	0000	0031	0061		1356	1297	1227	1150	1067	0980	0891	0802	0715	0631	0551	0477	0408	0346	0291	0242	0199	0162	0131	0104	0083	0065	0050	0038	0029	0022	0016	0,4
0,3	0000	0045	0090	0131		1240	1173	1099	1020	0937	0852	0767	0684	0603	0527	0456	0391	0331	0278	0231	0190	0155	0125	0100	0079	0062	0048	0037	0028	0021	0016	0,5
0,4	0000	0059	0115	0169	0217		1110	1041	0965	0887	0806	0726	0647	0571	0499	0432	0370	0313	0263	0219	0180	0147	0118	0094	0075	0058	0045	0035	0026	0020	0015	0,6
0,5	0000	0070	0138	0201	0259	0310		0975	0905	0831	0756	0680	0606	0535	0468	0404	0346	0294	0247	0205	0169	0137	0111	0089	0070	0055	0042	0033	0025	0019	0014	0,7
0,6	0000	0079	0156	0229	0295	0352	0400		0839	0771	0701	0631	0562	0496	0434	0375	0321	0272	0229	0190	0156	0127	0103	0082	0065	0051	0039	0030	0023	0017	0013	0,8
0,7	0000	0087	0171	0250	0322	0385	0437	0478		0708	0644	0580	0517	0456	0398	0345	0295	0250	0210	0175	0144	0117	0094	0075	0060	0047	0036	0028	0021	0016	0012	0,9
0,8	0000	0092	0181	0265	0341	0408	0463	0507	0537		0586	0527	0470	0415	0362	0313	0268	0228	0191	0159	0131	0106	0086	0069	0054	0042	0033	0025	0019	0014	0011	1,0
0,9	0000	0095	0187	0274	0353	0422	0479	0524	0555	0574		0475	0423	0373	0326	0282	0242	0205	0172	0143	0118	0096	0077	0062	0049	0038	0030	0023	0017	0013	0010	1,1
1,0	0000	0096	0189	0277	0356	0426	0484	0529	0561	0580	0586		0377	0333	0291	0253	0215	0183	0153	0127	0105	0085	0069	0055	0044	0034	0026	0020	0015	0012	0009	1,2
1,1	0000	0095	0187	0274	0353	0422	0479	0524	0555	0574	0580	0574		0294	0257	0222	0190	0161	0135	0113	0093	0075	0061	0049	0038	0030	0023	0018	0014	0010	0008	1,3
1,2	0000	0093	0182	0267	0343	0410	0466	0509	0540	0558	0564	0558	0543		0224	0194	0166	0141	0118	0098	0081	0066	0053	0042	0034	0026	0020	0016	0012	0009	0007	1,4
1,3	0000	0088	0174	0255	0328	0392	0445	0487	0516	0534	0539	0534	0519	0496		0168	0144	0122	0102	0086	0070	0057	0046	0037	0029	0023	0018	0013	0010	0008	0006	1,5
1,4	0000	0083	0164	0240	0309	0369	0419	0458	0486	0502	0507	0502	0489	0467	0439		0123	0104	0088	0073	0060	0049	0039	0031	0025	0019	0015	0012	0009	0007	0005	1,6
1,5	0000	0077	0152	0222	0286	0342	0388	0425	0450	0465	0470	0466	0453	0433	0407	0377		0089	0074	0062	0051	0041	0033	0027	0021	0017	0013	0010	0007	0006	0004	1,7
1,6	0000	0070	0139	0203	0261	0312	0355	0388	0411	0425	0429	0425	0414	0395	0372	0345	0315		0062	0052	0043	0035	0028	0022	0018	0014	0011	0008	0006	0005	0003	1,8
1,7	0000	0064	0125	0183	0236	0281	0320	0350	0371	0383	0387	0383	0373	0356	0335	0311	0284	0256		0043	0035	0029	0023	0019	0015	0012	0009	0007	0005	0004	0003	1,9
1,8	0000	0056	0111	0163	0209	0250	0284	0311	0329	0340	0344	0341	0331	0317	0298	0276	0252	0227	0202		0029	0024	0019	0015	0013	0010	0007	0006	0004	0003	0002	2,0
1,9	0000	0050	0098	0143	0184	0220	0249	0273	0289	0299	0302	0299	0291	0278	0261	0242	0221	0199	0177	0155		0019	0016	0013	0010	0008	0006	0005	0003	0003	0002	2,1
2,0	0000	0043	0085	0124	0159	0190	0216	0236	0250	0259	0261	0259	0252	0241	0226	0210	0192	0173	0154	0135	0117		0013	0010	0008	0006	0005	0004	0003	0002	0002	2,2
2,1	0000	0037	0072	0106	0136	0163	0185	0202	0214	0221	0224	0221	0215	0206	0194	0180	0164	0148	0131	0115	0100	0085		0008	0006	0005	0004	0003	0002	0002	0001	2,3
2,2	0000	0031	0061	0089	0115	0137	0156	0171	0181	0187	0189	0187	0182	0174	0164	0152	0139	0125	0111	0097	0084	0072	0061		0005	0003	0003	0002	0002	0001	0001	2,4
2,3	0000	0023	0051	0075	0096	0115	0130	0142	0151	0156	0158	0156	0152	0145	0137	0127	0116	0104	0093	0081	0070	0060	0051	0042		0003	0002	0002	0001	0001	0001	2,5
2,4	0000	0021	0042	0062	0079	0095	0108	0118	0125	0129	0130	0129	0125	0120	0113	0104	0095	0086	0076	0067	0058	0050	0042	0035	0029		0002	0001	0001	0001	0001	2,6
2,5	0000	0017	0034	0050	0065	0077	0088	0096	0102	0105	0106	0105	0102	0098	0092	0085	0078	0070	0062	0055	0047	0041	0034	0029	0024	0019		0001	0001	0001	0000	2,7
2,6	0000	0014	0028	0040	0052	0062	0071	0077	0082	0085	0085	0085	0082	0079	0074	0069	0063	0056	0050	0044	0038	0033	0028	0023	0019	0015	0012		0001	0000	0000	2,8
2,7	0000	0011	0022	0032	0041	0050	0056	0062	0065	0067	0068	0067	0066	0063	0059	0055	0050	0045	0040	0035	0030	0026	0022	0018	0015	0012	0010	0008		0000	0000	2,9
2,8	0000	0009	0017	0025	0033	0039	0044	0048	0051	0053	0054	0053	0052	0049	0046	0043	0039	0035	0031	0028	0024	0020	0017	0014	0012	0010	0008	0006	0005		0000	3,0
2,9	0000	0007	0013	0020	0025	0030	0035	0038	0040	0041	0042	0041	0040	0038	0036	0034	0031	0028	0025	0022	0019	0016	0013	0011	0009	0008	0006	0005	0004	0003		
3,0	0000	0005	0010	0015	0020	0023	0027	0029	0031	0032	0032	0032	0031	0030	0028	0026	0024	0021	0019	0017	0014	0012	0010	0009	0007	0006	0005	0004	0003	0002	0002	
x_1 / x_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	x_2

$\leftarrow P_1 \rightarrow$

↑ P_1 ↓   ↑ P_0 ↓

ПРИМЕЧАНИЯ: 1. x_1 по абсолютной величине должно быть больше x_2.
2. Перед приведенными в таблице значениями поставить 0,.
3. Если x_1 и x_2 имеют разные знаки, то у P_1 переменить знак на обратный.

Таблица 51б

Значения P_2 и P_3

P_2 — в верхнем правом треугольнике
P_3 — в нижнем левом

← P_2 →

x_1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	x_1 / x_2
	0796	0784	0749	0692	0617	0527	0425	0318	0208	0101	0000	−0091	−0170	−0236	−0287	−0323	−0345	−0355	−0353	−0342	−0323	−0299	−0272	−0242	−0213	−0184	−0156	−0131	−0108	−0088	−0071	0,0
		0772	0738	0682	0608	0519	0419	0313	0205	0099	0000	−0090	−0168	−0232	−0282	−0318	−0340	−0349	−0348	−0337	−0318	−0295	−0268	−0239	−0209	−0181	−0154	−0129	−0106	−0087	−0070	0,1
0,0	0000		0705	0651	0581	0496	0400	0299	0196	0095	0000	−0086	−0160	−0222	−0270	−0304	−0325	−0334	−0332	−0321	−0304	−0282	−0255	−0228	−0200	−0173	−0147	−0123	−0102	−0083	−0067	0,2
0,1	0000	0023		0602	0537	0458	0370	0276	0182	0068	0000	−0079	−0148	−0205	−0249	−0281	−0300	−0308	−0307	−0297	−0281	−0260	−0236	−0211	−0185	−0160	−0136	−0114	−0094	−0077	−0062	0,3
0,2	0000	0046	0089		0473	0408	0330	0246	0161	0078	0000	−0071	−0132	−0183	−0222	−0250	−0268	−0275	−0273	−0265	−0251	−0232	−0211	−0188	−0165	−0142	−0121	−0101	−0084	−0068	−0055	0,4
0,3	0000	0066	0128	0185		0348	0282	0210	0138	0067	0000	−0060	−0113	−0156	−0190	−0214	−0228	−0235	−0234	−0226	−0214	−0198	−0180	−0160	−0141	−0122	−0103	−0087	−0071	−0058	−0047	0,5
0,4	0000	0083	0161	0232	0292		0227	0170	0111	0054	0000	−0049	−0091	−0146	−0153	−0173	−0185	−0190	−0189	−0183	−0173	−0160	−0145	−0130	−0113	−0098	−0083	−0070	−0058	−0047	−0038	0,6
0,5	0000	0096	0187	0269	0338	0391		0127	0083	0040	0000	−0036	−0068	−0094	−0114	−0129	−0138	−0142	−0142	−0136	−0129	−0119	−0108	−0097	−0085	−0073	−0062	−0052	−0043	−0035	−0028	0,7
0,6	0000	0104	0204	0293	0368	0426	0464		0054	0026	0000	−0024	−0045	−0062	−0075	−0084	−0090	−0093	−0092	−0089	−0084	−0078	−0071	−0063	−0056	−0048	−0041	−0034	−0028	−0023	−0018	0,8
0,7	0000	0109	0212	0304	0383	0443	0483	0502		0013	0000	−0012	−0022	−0030	−0036	−0041	−0044	−0045	−0045	−0043	−0041	−0038	−0034	−0031	−0027	−0023	−0020	−0017	−0014	−0011	−0010	0,9
0,8	0000	0108	0211	0304	0381	0441	0481	0500	0499		0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	1,0
0,9	0000	0104	0202	0291	0366	0423	0461	0480	0478	0458		0010	0020	0027	0033	0037	0040	0041	0041	0039	0037	0034	0031	0028	0024	0021	0018	0015	0012	0010	0008	1,1
1,0	0000	0096	0187	0269	0337	0390	0426	0443	0441	0423	0390		0036	0051	0061	0069	0074	0076	0076	0073	0069	0064	0058	0052	0046	0039	0033	0028	0023	0019	0015	1,2
1,1	0000	0085	0165	0238	0299	0346	0377	0392	0391	0375	0346	0307		0070	0085	0096	0102	0105	0105	0101	0096	0089	0081	0072	0063	0054	0046	0039	0032	0026	0021	1,3
1,2	0000	0072	0140	0202	0253	0293	0320	0332	0331	0318	0293	0260	0220		0103	0116	0124	0128	0127	0123	0116	0108	0098	0087	0077	0066	0056	0047	0039	0032	0025	1,4
1,3	0000	0058	0113	0162	0203	0235	0257	0267	0266	0255	0235	0209	0177	0142		0131	0140	0144	0143	0139	0131	0121	0110	0098	0086	0075	0063	0053	0044	0036	0029	1,5
1,4	0000	0043	0084	0121	0152	0176	0192	0199	0199	0190	0176	0156	0132	0106	0079		0150	0154	0153	0148	0140	0130	0113	0105	0092	0080	0068	0057	0047	0038	0031	1,6
1,5	0000	0029	0056	0081	0102	0117	0128	0133	0133	0127	0118	0104	0088	0071	0053	0035		0158	0157	0152	0144	0133	0121	0108	0095	0082	0070	0058	0048	0039	0032	1,7
1,6	0000	0015	0030	0043	0054	0063	0069	0071	0071	0068	0063	0056	0047	0038	0028	0019	0010		0156	0151	0143	0133	0120	0107	0094	0081	0069	0058	0048	0039	0031	1,8
1,7	0000	0003	0007	0010	0012	0014	0015	0016	0016	0015	0014	0013	0011	0009	0006	0004	0002	0001		0147	0139	0128	0117	0104	0091	0079	0067	0056	0046	0038	0030	1,9
1,8	0000	−0007	−0013	−0019	−0024	−0028	−0030	−0031	−0031	−0030	−0028	−0024	−0021	−0017	−0012	−0008	−0004	−0001	0002		0131	0121	0110	0098	0086	0075	0063	0053	0044	0036	0029	2,0
1,9	0000	−0015	−0029	−0042	−0053	−0061	−0067	−0070	−0069	−0066	−0061	−0054	−0046	−0037	−0028	−0018	−0010	−0002	0004	0010		0112	0102	0091	0080	0069	0059	0049	0041	0033	0027	2,1
2,0	0000	−0021	−0042	−0060	−0075	−0087	−0095	−0099	−0098	−0094	−0087	−0077	−0065	−0052	−0039	−0026	−0014	−0003	0006	0014	0019		0093	0083	0073	0063	0053	0045	0037	0030	0024	2,2
2,1	0000	−0026	−0050	−0072	−0091	−0105	−0115	−0119	−0119	−0114	−0105	−0093	−0079	−0063	−0047	−0032	−0017	−0004	0007	0017	0023	0028		0074	0065	0056	0048	0040	0033	0027	0022	2,3
2,2	0000	−0028	−0055	−0080	−0100	−0116	−0126	−0131	−0131	−0126	−0116	−0103	−0087	−0070	−0052	−0035	−0019	−0004	0008	0018	0026	0031	0034		0057	0049	0042	0035	0029	0024	0019	2,4
2,3	0000	−0030	−0058	−0083	−0104	−0120	−0131	−0136	−0136	−0130	−0120	−0107	−0090	−0073	−0054	−0036	−0019	−0004	0008	0019	0027	0032	0036	0037		0042	0036	0030	0025	0020	0016	2,5
2,4	0000	−0029	−0057	−0082	−0103	−0120	−0131	−0136	−0135	−0130	−0120	−0106	−0090	−0072	−0054	−0036	−0019	−0004	0008	0019	0027	0032	0036	0037	0037		0031	0026	0021	0017	0014	2,6
2,5	0000	−0028	−0055	−0079	−0099	−0115	−0125	−0130	−0130	−0124	−0115	−0102	−0086	−0069	−0052	−0035	−0019	−0004	0008	0018	0026	0031	0034	0035	0035	0034		0021	0018	0014	0012	2,7
2,6	0000	−0026	−0051	−0074	−0093	−0107	−0117	−0121	−0121	−0116	−0107	−0095	−0080	−0065	−0048	−0032	−0017	−0004	0008	0017	0024	0029	0032	0033	0033	0032	0029		0015	0012	0010	2,8
2,7	0000	−0024	−0047	−0065	−0084	−0097	−0106	−0110	−0110	−0106	−0097	−0086	−0073	−0059	−0044	−0029	−0016	−0003	0007	0015	0022	0026	0029	0030	0030	0029	0027	0024		0010	0008	2,9
2,8	0000	−0021	−0041	−0060	−0075	−0087	−0094	−0098	−0098	−0094	−0087	−0077	−0065	−0052	−0039	−0026	−0014	−0003	0006	0014	0019	0023	0026	0027	0027	0025	0024	0022	0019		0006	3,0
2,9	0000	−0018	−0036	−0052	−0065	−0075	−0082	−0085	−0085	−0082	−0075	−0067	−0057	−0045	−0034	−0023	−0012	−0003	0005	0012	0017	0020	0022	0023	0023	0022	0021	0019	0017	0015		
3,0	0000	−0016	−0031	−0044	−0056	−0064	−0070	−0073	−0073	−0070	−0064	−0057	−0048	−0039	−0029	−0019	−0010	−0002	0005	0010	0014	0017	0019	0020	0020	0019	0018	0016	0014	0012	0011	
x_1 / x_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	x_2

← P_3 →

ПРИМЕЧАНИЯ: 1. x_1 по абсолютной величине должно быть больше x_2.
2. Перед приведенными в таблице значениями поставить 0,.
3. Если x_1 и x_2 имеют разные знаки, то у P_3 переменить знак на обратный.

Таблица 51 *в*

Значения P_4 и P_5

P_4 — в верхнем правом треугольнике
P_5 — в нижнем левом

← P_4 →

x_1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	x_1 / x_2
\	0597	0582	0538	0469	0379	0274	0161	0047	−0062	−0160	−0241	−0304	−0345	−0366	−0367	−0351	−0321	−0281	−0234	−0184	−0135	−0088	−0046	−0011	0018	0040	0055	0064	0069	0069	0066	0,0
	\	0568	0525	0458	0370	0268	0157	0046	−0061	−0156	−0235	−0296	−0337	−0357	−0358	−0342	−0313	−0274	−0228	−0180	−0131	−0086	−0045	−0010	0018	0039	0054	0063	0067	0067	0064	0,1
0,0	0000	\	0486	0424	0342	0248	0145	0042	−0056	−0144	−0218	−0274	−0312	−0330	−0331	−0317	−0290	−0253	−0211	−0166	−0121	−0079	−0042	−0010	0016	0036	0050	0058	0062	0062	0060	0,2
0,1	0000	0029	\	0369	0298	0216	0127	0037	−0049	−0126	−0190	−0239	−0272	−0288	−0289	−0276	−0253	−0221	−0184	−0145	−0106	−0069	−0036	−0008	0014	0031	0043	0051	0054	0054	0052	0,3
0,2	0000	0056	0109	\	0241	0174	0102	0030	−0040	−0102	−0153	−0193	−0220	−0233	−0233	−0223	−0204	−0179	−0149	−0117	−0086	−0056	−0029	−0007	0011	0025	0035	0041	0044	0044	0042	0,4
0,3	0000	0080	0154	0217	\	0126	0074	0021	−0029	−0073	−0111	−0140	−0159	−0168	−0169	−0162	−0148	−0129	−0108	−0085	−0062	−0040	−0021	−0005	0008	0018	0025	0030	0031	0032	0030	0,5
0,4	0000	0097	0188	0266	0326	\	0043	0013	−0017	−0043	−0065	−0082	−0093	−0099	−0099	−0095	−0087	−0076	−0063	−0050	−0036	−0024	−0012	−0003	0005	0011	0015	0017	0019	0019	0018	0,6
0,5	0000	0109	0210	0297	0364	0408	\	0004	−0005	−0013	−0019	−0024	−0027	−0029	−0029	−0028	−0025	−0022	−0018	−0014	−0011	−0007	−0004	−0001	0001	0003	0004	0005	0005	0005	0005	0,7
0,6	0000	0114	0219	0310	0380	0425	0443	\	0006	0017	0025	0032	0036	0038	0038	0037	0033	0029	0024	0019	0014	0009	0005	0001	−0002	−0004	−0006	−0007	−0007	−0007	−0007	0,8
0,7	0000	0111	0215	0304	0372	0417	0434	0426	\	0043	0065	0081	0092	0098	0098	0094	0086	0075	0063	0049	0036	0024	0012	0003	−0005	−0011	−0015	−0017	−0018	−0018	−0018	0,9
0,8	0000	0103	0199	0281	0344	0385	0401	0393	0363	\	0098	0123	0140	0148	0148	0142	0130	0114	0095	0074	0054	0036	0019	0004	−0007	−0016	−0022	−0026	−0027	−0028	−0027	1,0
0,9	0000	0089	0172	0243	0298	0333	0348	0341	0315	0273	\	0155	0176	0186	0187	0179	0163	0143	0119	0094	0069	0045	0024	0005	−0009	−0021	−0028	−0033	−0035	−0035	−0034	1,1
1,0	0000	0072	0138	0195	0239	0268	0279	0273	0252	0219	0176	\	0200	0212	0213	0203	0186	0163	0135	0107	0078	0051	0027	0006	−0010	−0023	−0032	−0037	−0040	−0040	−0038	1,2
1,1	0000	0052	0100	0141	0172	0193	0201	0197	0182	0158	0126	0091	\	0224	0225	0215	0197	0172	0143	0113	0082	0054	0028	0006	−0011	−0024	−0034	−0040	−0042	−0042	−0041	1,3
1,2	0000	0031	0059	0084	0103	0115	0120	0117	0108	0094	0075	0054	0032	\	0226	0216	0197	0173	0144	0113	0083	0054	0028	0006	−0011	−0024	−0034	−0040	−0042	−0042	−0041	1,4
1,3	0000	0010	0020	0029	0035	0039	0041	0040	0037	0032	0026	0019	0011	0004	\	0207	0189	0165	0138	0108	0079	0052	0027	0006	−0011	−0023	−0032	−0038	−0040	−0040	−0039	1,5
1,4	0000	−0008	−0015	−0021	−0026	−0029	−0031	−0030	−0028	−0024	−0019	−0014	−0008	−0003	0002	\	0173	0151	0126	0099	0072	0047	0025	0006	−0010	−0021	−0030	−0035	−0037	−0037	−0036	1,6
1,5	0000	−0023	−0045	−0064	−0078	−0087	−0091	−0089	−0082	−0071	−0057	−0041	−0025	−0008	0006	0019	\	0132	0110	0087	0063	0041	0022	0005	−0008	−0019	−0026	−0030	−0032	−0032	−0031	1,7
1,6	0000	−0035	−0068	−0097	−0118	−0133	−0138	−0135	−0125	−0108	−0087	−0063	−0037	−0013	0010	0028	0043	\	0092	0072	0053	0034	0018	0004	−0007	−0016	−0022	−0025	−0027	−0027	−0026	1,8
1,7	0000	−0044	−0084	−0119	−0146	−0163	−0170	−0167	−0154	−0134	−0107	−0077	−0046	−0016	0012	0035	0053	0066	\	0057	0041	0027	0014	0003	−0005	−0012	−0017	−0020	−0021	−0021	−0020	1,9
1,8	0000	−0048	−0093	−0132	−0162	−0181	−0188	−0185	−0171	−0148	−0119	−0085	−0051	−0017	0013	0039	0059	0073	0080	\	0039	0020	0010	0002	−0004	−0009	−0012	−0015	−0016	−0016	−0015	2,0
1,9	0000	−0050	−0096	−0135	−0166	−0185	−0193	−0189	−0175	−0152	−0122	−0088	−0052	−0018	0013	0040	0060	0074	0082	0084	\	0013	0007	0001	−0003	−0006	−0008	−0009	−0010	−0010	−0010	2,1
2,0	0000	−0048	−0092	−0131	−0160	−0179	−0187	−0183	−0169	−0147	−0118	−0085	−0050	−0017	0013	0038	0058	0072	0079	0081	0079	\	0003	0001	−0001	−0003	−0004	−0004	−0005	−0005	−0005	2,2
2,1	0000	−0044	−0085	−0120	−0147	−0164	−0171	−0168	−0156	−0134	−0108	−0078	−0046	−0016	0012	0035	0053	0065	0073	0075	0072	0066	\	0000	0000	−0001	−0001	−0001	−0001	−0001	−0001	2,3
2,2	0000	−0038	−0074	−0105	−0128	−0143	−0150	−0147	−0135	−0117	−0094	−0066	−0040	−0014	0010	0031	0047	0058	0064	0065	0063	0058	0050	\	0000	0001	0002	0002	0002	0002	0002	2,4
2,3	0000	−0032	−0061	−0087	−0106	−0119	−0124	−0121	−0112	−0097	−0078	−0056	−0034	−0011	0009	0025	0039	0048	0053	0054	0052	0048	0042	0035	\	0003	0004	0004	0005	0005	0004	2,5
2,4	0000	−0025	−0048	−0068	−0083	−0093	−0097	−0095	−0088	−0076	−0061	−0044	−0026	−0009	0007	0020	0030	0037	0041	0042	0041	0038	0033	0027	0021	\	0005	0006	0007	0006	0006	2,6
2,5	0000	−0018	−0035	−0050	−0061	−0068	−0071	−0070	−0064	−0056	−0045	−0032	−0019	−0007	0005	0015	0022	0027	0030	0031	0030	0027	0024	0020	0016	0011	\	0007	0007	0007	0007	2,7
2,6	0000	−0012	−0023	−0033	−0040	−0045	−0047	−0046	−0042	−0037	−0029	−0021	−0013	−0004	0003	0010	0015	0018	0020	0020	0020	0018	0016	0013	0010	0008	0005	\	0008	0008	0008	2,8
2,7	0000	−0007	−0013	−0018	−0022	−0025	−0026	−0025	−0023	−0020	−0016	−0012	−0007	−0002	0002	0005	0008	0010	0011	0011	0011	0010	0009	0007	0006	0004	0003	0001	\	0008	0008	2,9
2,8	0000	−0002	−0004	−0006	−0007	−0008	−0008	−0008	−0007	−0006	−0005	−0004	−0002	−0001	0001	0002	0003	0003	0004	0004	0003	0003	0003	0002	0002	0001	0001	0000	0000	\	0007	3,0
2,9	0000	0001	0003	0004	0005	0005	0005	0005	0005	0004	0003	0002	0001	0000	0000	−0001	−0002	−0002	−0002	−0002	−0002	−0002	−0002	−0002	−0001	−0001	−0001	0000	0000	0000	\	
3,0	0000	0004	0008	0011	0013	0015	0015	0015	0014	0012	0010	0007	0004	0001	−0001	−0003	−0005	−0006	−0007	−0007	−0006	−0006	−0005	−0004	−0003	−0002	−0002	−0001	0000	0000	0001	\
x_1 / x_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	x_2

← P_5 →

↑ P_5 ↓ (слева) ↑ P_4 ↓ (справа)

ПРИМЕЧАНИЯ: 1. x_1 по абсолютной величине должно быть больше x_2.
2. Перед приведенными в таблице значениями поставить 0,.
3. Если x_1 и x_2 имеют разные знаки, то у P_5 переменить знак на обратный.

мента. Например, увеличение или уменьшение средних двух основных размеров на $^1/_4\sigma$, что составляет по росту округленно $1^1/_2$ *см*, по обхвату груди 1 *см*, следует признать весьма большим. Погрешность же ассортимента при подобном смещении (по табл. 48) будет составлять примерно всего 11%. Поэтому величина наивысшей потенциальной погрешности при исчислении ассортимента на основании хронологически отстающих данных не превосходит, повидимому, 10—12%.

Но очевидно, что рациональное решение задач антропологической стандартизации требует доведения такой скрытой погрешности до минимума.

Отсюда становится ясной необходимость расширения объема антропометрических исследований для устранения ошибок при стандартизации изделий. Распространение наблюдений на обширное число территориальных групп с целью возможно большего обхвата антропологического разнообразия населения нашей страны и производство повторных исследований является лучшей гарантией точности относящихся к антропологической стандартизации расчетов.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *А. А. Шмаков* Техн. ред. *А. Н. Ратнер*

Сдано в набор 11/VIII 1950 г. Подписано к печати 16/VI 1951 г.
Т-05014 от 16/VI-51 г. Бумага $70 \times 108^1/_{16}$ Печ. л. 13+5 вкл. Уч.-изд. л. 12,8
Бум. л. $4^3/_4$ Тираж 1000 Заказ № 50 Изд. № 83

Серпуховская типография Мособлполиграфиздата

Цена 10 р. 50 к.